

МИР ЗНАНИЙ

Р·Н·ЩЕРБАКОВ, Л·Ф·ПИЧУРИН

От проективной геометрии – к неевклидовой

МИР ЗНАНИЙ

Р. Н. ЩЕРБАКОВ, Л. Ф. ПИЧУРИН

От проективной геометрии — к неевклидовой

(вокруг абсолюта)

Книга для внеклассного чтения
IX, X классы

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

22.151
Щ16

Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф.

Щ 61 От проективной геометрии — к неевклидовой (вокруг абсолюта): Кн. для внеклассного чтения. IX, X кл. — М.: Просвещение, 1979. — 158 с., ил. — (Мир знаний).

Книга посвящена неевклидовой геометрии. Изложение основано нв идеях проективной геометрии и понятии вбсолюта. Авторы в популярной и ванимательной форме излагают основы проективной геомстрии, описывают различные неевклидовы геометрии иа плоскости и показывают возможность их применения в физике.

Значительное место уделено жизни и творчеству художников и ученых от впохи Возрождения до наших дней, мировоззренческим вопросам и вопросам воспитания творческой личности.

Книга может быть использована во внеклассной работе в школе и для самостоятельного чтения учащимися и студентами.

Щ $\frac{60601-741}{103(03)-79}$ 280—79 4802000000

ББК 22.151
517.5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сто пятьдесят лет назад, 23 февраля 1826 года профессор Лобачевский представил совету физико-математического факультета Казанского университета доклад, содержавший одно из величайших открытий первой половины XIX века. Значение открытия Николая Ивановича Лобачевского общеизвестно и сущность его широко освещена в популярной литературе. В результате у значительной части читателей создалось впечатление, что решение проблемы пятого постулата является высшим достижением и последним словом геометрии, что все основные задачи этой науки решены, что геометры в наше время занимаются лишь какими-то частными и незначительными вопросами.

В действительности дело обстоит далеко не так. Более того, именно с появлением новой геометрии открылись совершенно новые горизонты в развитии одной из древнейших наук и началось активное проникновение геометрии не только во все разделы современной математики, но и во многие области физики.

В эволюции идей Лобачевского и создании современной геометрии решающую роль сыграло возникновение проективной и дифференциальной геометрий. Однако ни проективная, ни дифференциальная геометрии не получили в отечественной популярной литературе достаточного освещения. В предлагаемой книге излагается история развития и некоторые факты проективной геометрии. Но главная цель книги не в этом.

Проективная геометрия является наиболее удобным исходным пунктом для объяснения сущности не только

геометрии Лобачевского, но и широкого круга других геометрических систем, возникновение которых связано с именем Феликса Клейна, с идеями теории групп преобразований. Именно при помощи методов проективной геометрии, обходясь относительно простым математическим аппаратом, можно описать девять хорошо известных в науке неевклидовых геометрий плоскости и показать возможность их применения в физике. Решающую роль в таком описании играет понятие абсолюта, т. е. некоторой фигуры, заданной на проективной плоскости и остающейся неизменной при всех преобразованиях некоторой подгруппы группы проективных преобразований. Рассказ об этом и составляет основное содержание книги.

Возникновение нового всегда связано с творчеством выдающихся личностей. Идеи, о которых пойдет речь, связаны с именами Леонардо да Винчи, Дезарга и Паскаля, Понселе и Шаля, Штейнера, Мёбиуса и Штаудта, Клейна, Гильберта и Минковского, К.А. Андреева и Н.А. Глаголева. Познакомить читателей с жизнью и творчеством этих замечательных людей — еще одна цель книги.

В наше время с каждым годом растет потребность в квалифицированных математиках, а подготовка математика — дело длительное, начинать ее надо как можно раньше, во всяком случае, задолго до окончания школы. Может быть, кто-то из читателей, размышляя над страницами книги, задумается и над выбором своего жизненного пути и решит связать его с математикой. Тогда окажется достигнутой еще одна цель книги.

Читать эту книгу будет не очень легко: легких книг по математике, как известно, не бывает. Более трудной, естественно, является вторая половина книги. Если некоторые места покажутся сначала вовсе не понятными, при первом чтении их можно пропустить. Если же все-таки захочется разобраться в прочитанном как следует, придется взяться за карандаш и бумагу и вернуться к пропущенному, чтобы прочесть его так, как вообще полагается читать математический текст: тщательно проделывая все преобразования, выполняя все чертежи и проводя доказательства.

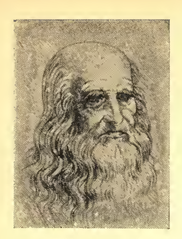
Мы полагаем, что книга окажется полезной не только ее главному читателю — любознательному старшекласснику, но и другим категориям читателей, в частности учителям и студентам.

Глава первая

ПЕРСПЕКТИВА, ДОЧЬ ЖИВОПИСИ

Это был заказ, о котором он мечтал уже не один год. Великолепное место — стена трапезной монастыря Санта Мария делла Грацпе. Великолепная тема — тайная встреча Иисуса Христа с его учениками, мгновение, которое последовало за словами: «Один из вас предаст меня». Сын божий, сознавая свою судьбу, смирплся с нею, он величав и спокоен — таким и надо напнсать его, мудрого и печального, такого, чтобы к нему стремилось все и на фреске и в душе зрителя. Двенадцать апостолов, двенадцать характеров, двенадцать ликов, нет, не ликов, а человеческих лиц, по-человечески страдающих от страшных слов учителя! Какая увлекательная работа! Придется сделать сотни набросков, эскизов, рисунков, придется посвятить фреске не только нынешний 1495-й, но и следующпй год, а может быть, п два.

Но главного оп должен добиться! Все, что получено за годы учебы, все законченные и незаконченные работы— — все это лишь начало, все это лишь попытки сказать новое, свое слово в живописи. Жпвопись — не ремесло, живопись — свободное и благородное искусство, порожденное природой. Но в природе тела имеют рельеф, у живописца же — плоскость холста или стены, и поэтому первое его намерение — сделать так, чтобы плоская поверхность показывала тело рельефным и отдаляющимся от этой плоскости. Художник достигает этой цели посредством трех перспектив, т. е. умепьшением фигур тел, уменьшением их отчетливостп и ослаблением их цветов. Первая происходит от глаза, а две другие произведены воздухом,



Леонардо да Винчи

находящимся между глазом и предметами, видимыми этим глазом. Живописец и есть тот, кто в силу необходимости своего искусства произвел на свет эту перспективу, и потому она — дочь живописи. Перспектива — руководитель и вождь для хорошей теории, на которой всегда должна быть построена практика и без которой ничего не может быть сделано хорошего в живописи.

Так или почти так думал гениальный художник и мыслитель Леонардо да Винчи (1452 –1519), приступая к работе над фреской «Тайная вечеря». Леонардо не был первым из тех, кто понял значение перспективы, значение геометрии для живописи. Но он сумел наиболее четко и выразительно сформулировать основные идеи теории перспективы, определить ее значение для практики живописца, архитектора, инженера и оставить примеры гениального применения этих идей не только в «Тайной вечере».

Теорию перспективы Леонардо рассматривает как порождение науки живописи. Уже само словосочетание «наука живописи» полно глубокого смысла. Оно показывает, что живопись имеет в своей основе строго научные закономерности, связанные с закономерностями человеческого зрения. «Мы знаем, что точка зрения помещается в глазу зрителя сюжета» — этой фразой начинается у Леонардо его теория перспективы.

Попытаемся уточнить формулировку задачи, стоявшей перед великим художником. Необходимо, чтобы изображение производило на зрителя такое же впечатление, что и изображаемый предмет. Как же возникает это впечатление? Из каждой видимой точки предмета луч света попадает в глаз зрителю, преломляется в зрачке, попадает на сетчатку глаза, на сетчатке возникает изображение рассматриваемого предмета. Дальнейшее (сетчатка, зрительный нерв, кора головного мозга) изучается анатомией и физиологией.



Леонардо да Винчи. *Тайная вечеря.* 1495—1497

Теперь представим себе, что между глазом и предметом установлена прозрачная плоская пластинка. Каждый луч, направленный от видимой точки к глазу, пересечет эту пластинку в одной точке. Множество таких точек и даст изображение предмета на пластинке. Описанный процесс носит название центрального проектирования, а полученное изображение называется проекцией. Такой проекцией в принципе должно быть и изображение предмета на любой плоскости, заменяющей эту прозрачную пластинку, — будь то холст, или бумага, или стена, отведенная для будущей фрески.

Вернемся к «Тайной вечере». Каждый видимой зрителю точке помещения, где происходило изображенное событие, соответствует определенная точка на картине. Каждому отрезку прямой (край стола, стороны окон и т.д.) в помещении соответствует отрезок прямой и на фреске. При этом равные отрезки не всегда изображаются на картине равными же отрезками, изменяются и некоторые углы. Например, надо полагать — и нарисовано так, что в это веришь, — потолок в комнате был прямоугольным, но его изображение на фреске имеет вид трапеции. Наконец, самое важное. В оригинале линии, по которым стены пересекаются с потолком, параллельны. На проекции соответствующие линии (точнее, их продолжения) пересекаются в одной точке. Тот факт, что они пересекают-

ся на изображении головы Христа, делает его фигуру еще более значительной, центральной, подчеркивающей особое место главного героя картины...

Однако от первых шагов в создании теории перспективы до того времени, когда эта теория оформилась в специальную науку — начертательную геометрию, прошло триста лет. Почему?

То, что нужно для живописи, быстро стало достоянием каждого грамотного художника. То же, что нужно для инженеров, конструкторов, строителей, еще не имело достаточного количества потребителей: в XVI веке требования техники были ограниченными и нужды в точном техническом черчении и тем более в его теоретическом обосновании не было. Это одна сторона вопроса, но есть и еще одна, более тонкая и глубокая. Художники эпохи Возрождения не могли даже и догадываться о том, сколь общи и значительны идеи и закономерности, заложенные в учении о перспективе. Понять значительность этих идей, подвергнуть эти закономерности более глубокому анализу должен был человек, который сумел бы сочетать в себе инженерные знания с талантом математика и способностью к смелым обобщениям, способностью отказаться от традиционных представлений, способностью выступить с идеями, противоречащими традициям.

Первый (следовательно, самый трудный) шаг был сделан в 1639 году архитектором Жираром Дезаргом (1591—1661). Он опубликовал брошюру с длинным по обычаю того времени, но очень любопытным названием: «Черновой набросок попытки разобраться в том, что получается при пересечении конуса плоскостью». На первый взгляд разбираться здесь не в чем: еще в III веке до нашей эры Аполлоний установил, что при пересечении кругового конуса плоскостью могут получиться (рис. 1) либо эллипс (в частности, окружность), либо парабола, либо гипербола, либо одна точка (вершина конуса), либо одна прямая (образующая), либо две прямые, проходящие через эту вершину. Этих шести «либо» достаточно. Последние три — не совсем интересны, остальные три — любопытны, но их свойства уже основательно изучены. В чем же тут разбираться и стоит ли?

Оказывается, стоит! Ибо «Черновой набросок...» сыграл огромную роль в создании и развитии новой геометрии.

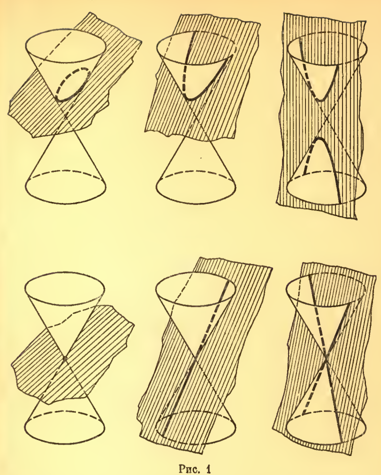


Рис. 1

Еще говоря о перспективе, мы отметили необычную ситуацию, связанную с параллельными прямыми: их изображение имело точку пересечения. Дезарг решается на очень простой и именно в простоте своей и необычный шаг: он предлагает считать эти точки пересечения изображениями (проекциями) «бесконечно удаленных» точек, в которых «пересекаются» параллельные прямые (рис. 2; точке T' плоскости β соответствует бесконечно удаленная точка T плоскости α). Более того, он предлагает счи-

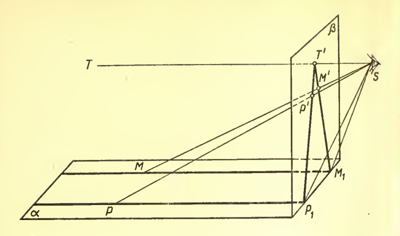


Рис. 2

тать бесконечно удаленные точки прямых равноправными (со всеми остальными) точками. Говоря более современным языком, Дезарг дополняет евклидово пространство новыми элементами: *несобственными* (бесконечно удаленными) *точками*, а также еще и плоскостью, на которой лежат все несобственные точки, — *несобственной плоскостью*.

Насколько плодотворной оказалась эта идея, мы увидим дальше, а пока заметим, что удивляться этому шагу читатель не должен. Подобного рода «неожиданные» шаги выполняются даже в школьной математике. Достаточно вспомнить решение уравнения $ax = b$. В области целых чисел оно разрешено лишь при b, кратном a. Но, введя дроби, мы снимаем это ограничение.

Две прямые, лежащие в одной и той же плоскости, у Евклида пересекаются, если они не параллельны. У Дезарга две прямые одной плоскости всегда пересекаются. Ограничений никаких. Значит, бóльшая общность, значит, бóльшая область применения, значит, новое пространство охватывает «старое» евклидово примерно так же, как множество рациональных чисел включает в себя множество чисел целых.

Это «дополненное» евклидово пространство и служит хорошей моделью того нового пространства, которое ввел Дезарг и которое в наше время называется *проектив-*

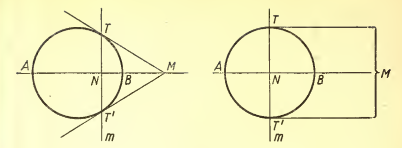


Рис. 3

ным пространством. Геометрия этого простанства, называется *проективной геометрией,* и будет основным объектом нашего внимания в дальнейшем. Название «проективная» подчеркивает, что идеи новой геометрии возникли при изучении операции проектирования.

Но Дезарг не только ввел в рассмотрение проективное пространство, но сделал и следующий важный шаг: он нашел простейшую величину, которая сохраняется при проектировании и является таким же основным понятием проективной геометрии, как расстояние между двумя точками в геометрии Евклида, — так называемое *сложное отношение.* Этот шаг основывается на весьма простой идее. Суть ее состоит в следующем. Вернемся к рисунку 1. Среди сечений конуса самым простым является круг. Дезарг попытался выделить те свойства круга, которые сохраняются для всех конических сечений, коль скоро эти последние являются центральными проекциями круга. Надо будет только помнить, что́ изменяется при проектировании (это знали еще художники Возрождения), а что́ остается неизменным (тут некоторые вопросы еще нуждаются в уточнении).

Вот, например, одно из свойств круга и связанных с ним точек и линий, известное еще древним грекам и распространенное Дезаргом на все конические сечения. Пусть в некоторой плоскости имеется окружность и точка M вне ее (рис. 3). Из этой точки (даже если она бесконечно удалена!) можно провести две касательные (в последнем случае — параллельные). Точки касания определяют единственную прямую m. Или по-другому. Имеется окружность и пересекающая ее прямая. Через точки пе-

ресечения окружности и секущей можно провести две касательные. Они пересекутся в некоторой точке M (может быть, в бесконечно удаленной). Договоримся в этой ситуации называть точку M *полюсом* прямой m, а прямую m — *полярой* точки M. Через полюс и центр окружности проведем прямую. Она пересечет окружность в точках A и B, а поляру — в точке N. Таким образом, на этой прямой получатся две пары точек: одна пара на окружности, а вторая — полюс и точка на поляре. Оказывается, отношение длин отрезка AN и NB равно отношению длин отрезков AM и MB. Этот факт можно записать в виде равенства

$$\frac{|AN|}{|NB|} = \frac{|AM|}{|MB|}$$

или равносильного ему равенства

$$\frac{|AN|}{|NB|} : \frac{|AM|}{|MB|} = 1.$$

Принято говорить, что точки N и M делят отрезок AB *гармонически* или что на прямой имеется *гармоническая четверка* точек.

Сделаем еще один шаг. Уберем с нашего чертежа окружность и поляру, оставим только их «следы» — саму прямую, точки A и B, полюс M и точку N, т.е. оставим четверку точек на прямой. Вне этой прямой возьмем точку, которую будем считать центром проекции, а лучи, проходящие через центр и гармоническую четверку точек, будем называть гармонической четверкой лучей. Замечательно, что на любой другой прямой, пересекающей эти лучи, четверка новых точек — A', B', M' и N' — (рис. 4) снова будет гармонической.

Если на чертеже нет окружности и поляры, то по «внешнему виду» трудно сообразить, гармоническая это четверка или нет. Придется измерить четыре отрезка, найти отношения $|AN|:|NB|$ и $|AM|:|MB|$ и «отношение отношений» $(|AN|:|NB|):(|AM|:|MB|)$. Если получится единица, то налицо гармоническая четверка. А если нет? Ведь какое-то число все равно получится. Назовем его *сложным отношением* четырех точек. Так вот оказывается, что сложное отношение четырех точек тоже сохраняется при центральном проектировании (см. рис. 4). Это можно доказать, выразив длины отрезков через синусы углов

при точке S и используя формулу площади треугольника. Очевидно, этот факт должен найти (и найдет!) дальнейшее применение. А с чего все началось? С центрального проектирования круга!

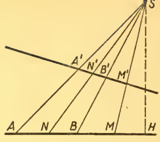


Рис. 4

Идеи Дезарга были настолько новы и оригинальны, что большинство его современников оказалось не в состоянии их воспринять, а судьба «Чернового наброска...», как и других сочинений Дезарга, была печальна. Не понятая современниками, не принесшая ни успеха, ни хоть малой известности автору, брошюра, изданная всего в пятидесяти экземплярах, исчезла. Лишь через два столетия французский геометр и историк геометрии М. Шаль нашел ее копию. Только тогда Дезарга стали называть создателем новой геометрии, творцом проективной геометрии, великим геометром.

Одним из немногих современников, понимавших Дезарга, был гениальный философ, родоначальник новой математики, создатель метода координат Рене Декарт (1596—1650). Его методом были сравнительно легко решены многие трудные и даже «неразрешимые» задачи, сформулированные еще древними. Естественно, большинство геометров XVII—XVIII веков работало методом Декарта. Но не все! В 1640 году — и опять тиражом 50 экземпляров — было напечатано «Эссе[1] о конических сечениях» (одна страница!). Оно содержало три определения, три леммы и несколько теорем, доказательство которых в тексте не приводилось. Автору, укрывшемуся за скромными инициалами *Б. П.*, еще не было семнадцати лет. К сожалению, доказательства юного автора так и остались неопубликованными. Ныне его имя — Блез Паскаль — известно каждому школьнику из учебника физики.

---

[1] Слово «эссе» употребляется (в заглавиях!) и до сих пор. Оно означает «размышления, рассуждения», хотя буквальный перевод его: «опыт».


Блез Паскаль

Уже в эссе содержится то, что гарантировало Паскалю бессмертие, а именно лемма 1, известная теперь как теорема Паскаля. Мы еще вернемся к ее содержанию, а сейчас отметим другое место из эссе. Паскаль пишет: «... г-н Дезарг из Лиона — один из великих умов настоящего времени и из наиболее искусных в математике, в том числе в конических сечениях, сочинения которого по этому предмету хотя и немногочисленны, но широко свидетельствуют о сказанном для тех, кто пожелал их уразуметь. И я с готовностью признаю, что тем немногим, что нашел по этому предмету, я обязан его сочинениям и что я старался, насколько мог, следовать его методу в этом вопросе...».

Гений сразу «уразумел» гения, остальным же пришлось подождать еще полтора столетия...

То, что юноша, почти мальчик, сделал крупное открытие в науке, кажется поразительным. Но еще более поразительно, как маленький Паскаль открыл для себя науку. Его отец, известный математик Этьен Паскаль, на вопрос сына, что такое геометрия, ответил: «Геометрия есть наука, дающая средство правильно чертить фигуры и находить отношения, существующие между этими фигурами». Двенадцатилетний мыслитель стал думать над этим определением, рисовать отрезки прямых, называя их палками, и круги, называя их кольцами, составлять из них фигуры, изучать свойства и незаметно добрался до теоремы о сумме углов треугольника. Узнав об этом отец дал сыну «Начала» Евклида, которые мальчик изучил, не задав ни одного вопроса.

Мальчик Паскаль быстро и легко овладел геометрией Евклида. Юноша Паскаль шагнул вслед за Дезаргом вперед.

Глава вторая

ГЕОМЕТР ИЗ РУССКОГО ПЛЕНА...

Отечественная война 1812—1814 годов обычно вызывает в нашем сознании страницы «Войны и мира», посвященные битве при Бородино, или строки лермонтовского стихотворения. И как-то забывается, что была еще и оборона Смоленска, и переправа через Березину, и взятие Парижа. Была и блестящая победа при селе Красном в ноябре 1812 года, когда почти половина наполеоновской армии попала в русский плен. Конечно, один из пленных — офицер инженерного корпуса Жан Виктор Понселе — едва ли мог радоваться и самому факту пленения, и перспективе прожить в каком-то неведомом Саратове неопределенное время (потом оказалось — пятнадцать месяцев). Но он понимал, что для него война окончена, что, может быть, снова удастся заняться любимым делом.

А любимым делом выпускника знаменитой Политехнической школы была наука, и из плена он привез на родину записки по геометрии, ставшие основой для вышедшего в 1822 году «Трактата о проективных свойствах фигур».

О каких свойствах идет речь? Хорошо известно, что геометрия, изучая некоторые свойства окружающего нас пространства, отбрасывает, как несущественные, не представляющие интереса, другие свойства. Например, изучается квадрат. Реальные квадраты, например, поля шахматной доски, имеют тот или иной цвет. Геометра это свойство не интересует. Оно — не геометрическое. Он рассматривает квадрат, не имеющий цвета, нисколько не

беспокоясь о том, что в природе таковых существовать не может. Напротив, узнав какое-то свойство «бесцветного» квадрата, он немедленно распространяет это свойство на все квадраты — и черные, и желтые. Геометру важно, что это свойство сохраняется при любом изменении окраски.

Почему же не пойти дальше и не начать рассматривать свойства, которые сохраняются при других изменениях или преобразованиях предмета, например при проектировании? Правда, при этом придется отбросить много привычного. Например, есть такое свойство — конгруэнтность углов. Его придется отбросить, этот «цвет» нам не нужен, это свойство не «проективно», т.е. не сохраняется при проектировании. Как быть с перпендикулярностью? Нет никакой перпендикулярности: она не является проективным свойством — вспомним еще раз «Тайную вечерю». Но, значит, нет и прямоугольников? И квадратов? А как же быть с диагоналями ромба, которые взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам? Нет этой теоремы, хуже того, нет и самого ромба, так как нет и равенства отрезков, — этот «цвет» нам тоже не нужен. Конечно, и теорема Пифагора не является проективной. Теперь, наверное, читатель усомнится в необходимости изучать такую геометрию, в которой, кажется, вообще уже ничего содержательного не осталось.

Осталось! Более того, в этой новой «проективной» геометрии остались многие глубокие и изящные факты. Осталось сложное отношение четырех точек на прямой, осталась гармоническая четверка. Осталась и замечательная теорема Паскаля. Поговорим о ней подробнее.

Впишем в любое коническое сечение (для проективной геометрии разницы между ними нет) произвольный шестиугольник (см. рис. 5, на котором стороны занумерованы). Продолжим теперь до пересечения первую и четвертую, вторую и пятую, третью и шестую стороны. Полученные прямые обязательно пересекутся, ибо параллельных в проективной геометрии нет. Итак, мы имеем три точки пересечения трех пар прямых. Вообще говоря, три произвольные точки плоскости не лежат на одной прямой, но эти три — лежат. В этом и заключается теорема Паскаля. Если теперь проектировать коническое сечение вместе с шестиугольником, с точками пересечения его сторон и с прямой, проходящей через эти три

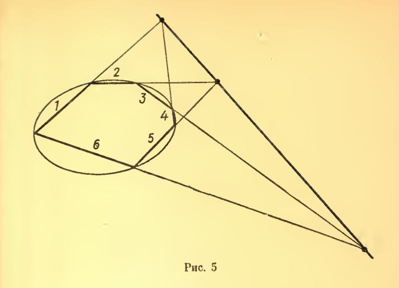


Рис. 5

точки (ее называют паскалевой прямой), на другую плоскость, то, как бы не изменялось коническое сечение и вся эта конфигурация, указанные три точки все равно будут лежать на одной прямой. Теорема Паскаля — проективная теорема.

Понселе отчетливо понимал, что задача заключается в выделении проективных свойств фигур в особый класс, и первым приступил к систематическому изучению этих свойств.

Изучение новых свойств потребовало и создания новых методов. Для того чтобы рассказать хотя бы об одном из этих методов, обратимся к изящной главе геометрии Евклида — главе о правильных многогранниках. Возьмем самый простой из них — тетраэдр. У тетраэдра имеется четыре грани и четыре вершины. Попробуем заменить каждую вершину (точку) плоскостью, параллельной противоположной грани. Получится новый тетраэдр. Если же заменить у данного тетраэдра каждую грань (плоскость) ее центром (точкой) и соединить эти точки, то мы получим еще один тетраэдр. Рассмотрим теперь куб. У него восемь вершин и шесть граней. Если заменить каждую вершину плоскостью, перпендикулярной диагонали, то мы получим восьмигранник с шестью вершина-

ми — октаэдр. Заменим каждую грань куба точкой — центром грани. Соединим эти точки. Получится новый октаэдр. Что интересного в этих примерах? Всюду замена точки на плоскость (или наоборот) давала новое тело, как-то родственное исходному. К сожалению, построения в пространстве представляют некоторые трудности. Попробуем найти аналогичные построения, аналогичную «родственность» на плоскости.

Конечно, раз речь пойдет о плоскости, то интересовать нас будет не пара «точка — плоскость», а пара «точка — прямая». Где можно осуществить такие замены? Общеизвестно, что «через две различные точки можно провести единственную прямую».

Попробуем здесь произвести замену «точка — прямая». Получается: «Через две различные прямые можно провести единственную точку».

Последняя фраза звучит плохо, но понять ее нетрудно: две прямые пересекаются (всегда, ибо параллельность не проективное свойство!) в единственной точке. Чтобы улучшить эту и аналогичные фразы, геометры ввели термин — «инцидентность». Когда говорят, что прямая и точка инцидентны, то понимают, что точка лежит на прямой и что прямая проходит через точку. Теперь можно сказать так:

Две различные точки инцидентны единственной прямой.	Две различные прямые инцидентны единственной точке.

В качестве еще одного примера возьмем теорему Паскаля (см. рис. 5). Сформулируем ее так: «Пусть точки *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* инцидентны коническому сечению. Тогда точки, инцидентные прямым *12* и *45*, *23* и *56*, *34* и *61*, инцидентны одной и той же прямой». Мы надеемся, что читатель сообразил, как понимать обозначение «прямая *12*» (читать следует: «прямая один два», а не прямая «двенадцать»).

Заменим в теореме Паскаля слово «точка» словом «прямая» и слово «прямая» словом «точка». Получим следующее предложение: «Пусть прямые *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* инцидентны коническому сечению. Тогда прямые, инцидентные точкам *12* и *45*, *23* и *56*, *34* и *61*, инцидентны одной и той же точке». Выражение «прямая инцидентна кривой» означает касание (рис. 6).

Теперь задумаемся над этой новой теоремой. Она

содержит совершенно новое свойство конического сечения, доказанное в 1806 году выпускником Политехнической школы Ш. Брианшоном. Понселе установил, что теорему Брианшона вообще не надо доказывать, если доказать так называемый *принцип двойственности*: «из каждого проективного предложения относительно точек и прямых на плоскости может быть получено второе предложение путем замены слова «точка» словом «прямая» и наоборот».

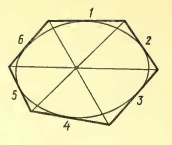
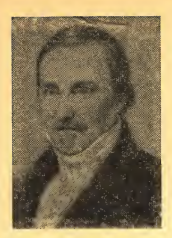


Рис. 6

Итак, Понселе выделил «проективные» свойства геометрических фигур и указал на замечательный инструмент их изучения, порожденный внутренней структурой проективного пространства, — на «принцип двойственности». Теперь стала ясной область исследования новой геометрии — проективные свойства фигур. Но не Понселе суждено было развивать открытую им новую геометрию ...

Как в дальнейшем сложилась судьба Понселе? Перед нами сейчас две возможности — или изложить биографию ученого, как говорят школьники, своими словами, или же прибегнуть к цитате. Мы выбираем второй путь и вовсе не по лености, а потому, что хотим как можно раньше познакомить читателя с одним из основных героев нашей книги — немецким математиком Феликсом Клейном. Вот как он описывает деятельность возвратившегося из плена Понселе в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии».

«...Мир снова вернул ему свободу. С 1815 года он работает в арсенале Метца в качестве военного инженера ... Общественная деятельность, однако, все больше и больше поглощала его силы, отвлекая от любимых проблем чистой науки. Против своей воли, уступая желанию Араго, как он говорил позже, стал он в том же Метце профессором Прикладной школы (1825—1835). Из внимания к нуждам своей родины он посвятил себя изучению чужих стран; особенно важной представлялась ему расцветавшая в ту пору промышленная жизнь Англии. Хотя в 1826 году он опубликовал свой «Курс механики», но вскоре организационные и педагогические задачи совсем погло-



Жан Виктор Понселе

тили его. Начиная с 1835 года он занимал высшие военные должности в Париже, был членом Комитета обороны и наряду с этим с 1838 по 1848 год профессором физической и прикладной механики в Сорбонне, а затем начальником Политехнической школы. Его высокое положение дало ему возможность стать в 1851 году представителем Франции на первой всемирной выставке в Лондоне и председателем жюри; он участвовал также в подготовке парижской всемирной выставки 1855 года. Трагедия его жизни заключается в том, что столь одаренный человек считал, что он не имел права отдаваться своему истинному призванию. Уже стариком, выпуская в 1864—1866 годах новое издание своего «Трактата», он горько жаловался на судьбу, которая заставила его совершенно оставить свои любимые занятия и лишила возможности добиться должного признания своих работ. Старый конфликт между «vita activa» («жизнью действенной») и «vita contemplativa» («жизнью созерцательной») внес диссонанс в конец его жизни. Понселе умер в 1867 году.»

... Мы еще встретимся с Феликсом Клейном. Но мы прощаемся с пионером проективной геометрии Понселе. Труды пионеров имеют непреходящую ценность, но пользуются ими только непосредственные продолжатели и историки науки. Ибо первое изложение не бывает (да и не может быть) лучшим...

Глава третья

УЧЕНЫЙ БЕЗ ОБРАЗОВАНИЯ

18 марта 1796 года в семье швейцарского крестьянина в маленьком городке Уцендорфе недалеко от Берна родился Якоб Штейнер. Жизнь его ничем не отличалась от жизни его товарищей — плуг, серп, хлев. Образование? Позднее он сам говорил, что к девятнадцати годам он едва умел писать, а уж о «светском воспитании» и говорить не приходится. Много лет спустя это принесло профессору Штейнеру немало неприятностей. По мнению прусских профессоров, этот «выскочка» был слишком груб и неотесан.

Из круга сверстников Якоба выделяли лишь повышенная любознательность, превосходное знание эмпирической астрономии (он ночи напролет наблюдал за звездным небом), умение довольно бойко считать в уме да еще желание стать учителем. Отцу Якоба вовсе не хотелось терять работника, и это желание, наверное, так и осталось бы несбывшимся, если бы не вмешательство Песталоцци.

Один из основателей теории начального обучения, создатель теории развивающего обучения швейцарец Иоган Генрих Песталоцци руководил тогда в Ивердоне своеобразной школой-интернатом, где готовились учителя начальной школы и где он проверял свои педагогические идеи. Воспитанников интерната собирали по всей стране, нередко и из необеспеченных семей. По рекомендации одного из своих помощников, заметившего любознательного и настойчивого юношу, Песталоцци принял

Штейнера после месяца испытательного срока на бесплатное обучение.

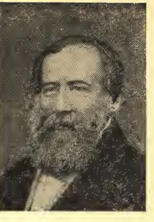
В педагогической системе Песталоцци математика занимала особое место. Он считал, что обучать надо так, чтобы ученик под руководством наставников добирался до всего своим умом, опираясь на наглядные представления и опыт. Все должно быть открыто, понято, проработано самим учащимся. Конечно, такая система формирует довольно прочные знания, но объем их по отношению к затраченному времени оказывается очень небольшим. Штейнер впоследствии вспоминал о школе Песталоцци: «... математические науки преподавались больше ради мето́ды их, а не в их объективном систематическом объеме... Применявшаяся в заведении Песталоцци мето́да давала мне, как ученику этого заведения, повод изыскивать для установленных при преподавании предложений возможно более глубокие основания, чем те, которые устанавливали мои тогдашние учителя. И мне это часто удавалось, так что учителя предпочитали мои доказательства своим; благодаря этому после полуторагодичного пребывания моего в этом заведении мне решились доверить преподавание математики».

За полтора года юноша догнал своих учителей и стал в один ряд с ними! Естественно, что возбужденный живым интересом к науке и почувствовавший потребность систематического изучения математики, Штейнер оставил Ивердон и поступил в университет.

Первые научные статьи он опубликовал в 1826 году. Одновременно Штейнер работал над капитальным сочинением «Систематическое развитие зависимости геометрических образов одного от другого». Постепенно его научные успехи получают всеобщее признание. О его работах появляются прекрасные отзывы крупных ученых, он получает звание профессора, Кенигсбергский университет присваивает ему степень доктора философии (степени доктора математики тогда еще не существовало), в 1834 году его избирают в члены Академии наук. Стремительный взлет малограмотного крестьянина к академическим высотам потребовал колоссального напряжения сил и дорого обошелся Штейнеру. В конце концов он тяжело заболел и в апреле 1863 года скончался.

Необычность жизненного пути Штейнера сказалась и в его творческом развитии. Он все постиг сам, на нем

не висел груз теорий и заблуждений предшественников. И в то же время, не имея хорошей систематической подготовки, не зная в достаточной степени достижений не только предшественников, но — и это особенно важно — современников, а в конце жизни демонстративно пренебрегая ими, он прошел мимо весьма важных аспектов своих теорий и не смог полностью решить задачи, которые наметил с гениальной прозорливостью... Из пяти частей упомянутой выше книги с длинным названием он написал только одну (она вышла в свет в 1832 году в Берлине), обеспечившую ему бессмертие.



Якоб Штейнер

С самоуверенностью, часто свойственной ученым, недостаточно знающим историю науки, но обладающим острым и критическим умом, Штейнер так охарактеризовал цель своего основного труда: «Предлагаемое произведение пытается вскрыть тот механизм, которым связаны друг с другом разнообразнейшие явления в пространстве. Существует ограниченное количество весьма простых основных соотношений, выражающих ту схему, по которой основная масса предложений развивается последовательно и без всяких затруднений. Посредством надлежащего усвоения этих немногих основных соотношений делаешься господином всего предмета; порядок заступает место хаоса, и видишь, как все части естественно опираются друг на друга, располагаются в прекрасном порядке и соединяются в удачно отграниченные группы. Таким образом, удается овладеть теми элементами, из которых исходит природа, и с возможной экономией и простейшим образом придать фигурам несчетное множество свойств».

Что и говорить, поставлена величественная задача. Правда, получается, что Дезарг и Понселе, не говоря уж о многих других ученых, лишь создали хаос, в котором Штейнер берется навести порядок. И сам Штейнер об этом объявляет!

Что ж, простим ученому этот недостаток скромности и вместе с ним посмотрим, как можно навести порядок в хаосе.

Выясним прежде всего, в чем же можно увидеть хаос? Ведь обычно математики подчеркивают, сколь стройно и красиво здание евклидовой геометрии, как последовательно и изящно выстроены этажи, как прочен цемент доказательств, скрепляющий факты. И вот, на тебе — хаос! И тем не менее Штейнер прав. В евклидовой геометрии есть немало странного, только обычно этих странностей не замечают либо в силу привычек и традиций (у Штейнера их не было), либо по лености мысли (ее-то у Штейнера и подавно не могло быть!).

Вот одна из таких странностей. До сих пор в школьном курсе математики гипербола появляется (в алгебре, а не в геометрии!) как график обратной пропорциональности. Парабола изучается тоже как график — график квадратного трехчлена. А об эллипсе если и говорят, то главным образом в связи с законами Кеплера. Итак, геометрическим фигурам, хорошо известным еще древним грекам, не находится места в школьном курсе геометрии. И в то же время каждому ясно, что рисунок 1 с сечениями конуса понятнее и убедительнее любых вычислений. Не случайно же эллипс, гипербола, парабола и окружность с проективной точки зрения — одно и то же. Должно быть что-то, «с возможной экономией и простейшим образом придающее фигурам несчетное множество свойств», должен существовать способ образования этих фигур, свободный и от формул, и от трехмерного пространства!

Попробуем вместе со Штейнером «систематически развить зависимость геометрических образов одного от другого». Начать надо, естественно, с самого простого — с точек и прямых. Простейшая связь между ними — перспектива. Она приводит в соответствие точкам A, B, C, D... одной прямой (l) точки A', B', C', D'... другой (l'), а также пучок прямых a, $в$, c, d... с центром в точке S (рис. 7).

Заменим теперь прямую l точкой L, прямую l' точкой L', точку S прямой s, точки A, B, C, D... и A', B', C', D'... прямыми a, b, c, d... и a', b', c', d'..., как это сделано на рисунке 8, т. е. применим принцип двойственности.

В первом случае два точечных ряда приведены в соответствие при помощи пучка прямых. Во втором — два

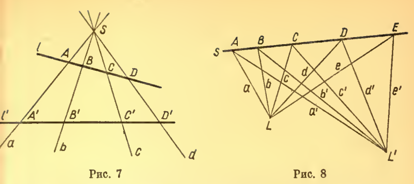


Рис. 7 Рис. 8

пучка прямых приведены в соответствие при помощи точечного ряда. Оба соответствия называются *перспективными* и обозначаются так:

$$ABCD \ldots \overline{\overline{\wedge}}\, A'B'C'D' \ldots ,$$

$$abcd \ldots \overline{\overline{\wedge}}\, a'b'c'd' \ldots$$

Сами точечные ряды и пучки прямых (уже не просто точки и прямые, а ряды и пучки!) мы будем, следуя Штейнеру, называть «образами первой ступени», — это ведь, действительно, первое, что получено из точек и прямых.

Какими свойствами обладает перспективное соответствие (нам это надо знать, так как мы собираемся широко им пользоваться)? Перспективное соответствие является отношением между объектами, а в математике, говоря об отношениях, обычно интересуются тремя свойствами: рефлексивностью, симметрией и транзитивностью. Например, отношение равенства чисел рефлексивно ($x = x$), симметрично (если $x = y$, то $y = x$) и транзитивно (если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$).

Перспективное соответствие, очевидно, симметрично. Что касается рефлексивности, то о ней здесь можно говорить только формально: считать любой ряд (пучок) перспективным самому себе. А как обстоит дело с транзитивностью? Иначе говоря, можно ли утверждать, что если (рис. 9) $ABCD \ldots \overline{\overline{\wedge}}\, A'B'C'D' \ldots$ и $A'B'C'D' \ldots \overline{\overline{\wedge}}\, A''B''C''D'' \ldots$, то $ABCD \ldots \overline{\overline{\wedge}}\, A''B''C''D'' \ldots$? Легко проверить, что нет: прямые AA'', BB'', CC'' и DD'' в общем случае не пересекутся в одной и той же точке, т.е. при композиции двух перспективных соответствий новое соот-

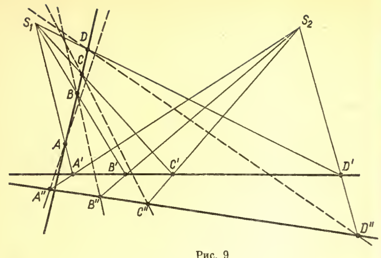


Рис. 9

ветствие не будет перспективным. Но так как арифметическое равенство транзитивно, то сложное отношение четверки точек сохранится! Значит, хотя перспектива и не сохранилась, все же ряды $ABCD...$ и $A''B''C''D''...$ сохранили какие-то «родственные» связи. Таким образом, ряды, полученные в результате нескольких последовательных перспектив, сохраняют некоторое проективное свойство — неизменность (инвариантность) сложного отношения.

Поэтому мы можем ввести такое определение: взаимнооднозначное соответствие двух точечных рядов называется *проективным*, если сложные отношения любых соответствующих четверок точек равны. Мы будем кратко писать:

$$ABCDE... \overline{\wedge}\, A'B'C'D'E'...$$

В соответствии с определением эта запись и означает, что для любых соответствующих четверок точек $LMNP$ и $L'M'N'P'$, принадлежащих рядам $ABCDE...$ и $A'B'C'D'E'...$, имеет место равенство

$$\frac{|LN|}{|NM|} : \frac{|LP|}{|PM|} = \frac{|L'N'|}{|N'M'|} : \frac{|L'P'|}{|P'M'|} .$$

Последнее равенство можпо записать короче, если ввести такое обозначение[1] сложного отношения:

$$\frac{|AC|}{|CB|}:\frac{|AD|}{|DB|}=(AB;\ CD).$$

Мы получили равенство, определяющее проективность точечных рядов:

$$(LM;\ NP)=(L'M';\ N'P').$$

Так как это условие всегда выполняется для перспективы, то перспективное соответствие является частным случаем проективного.

Читатель по принципу двойственности легко распространит определение проективности рядов точек вместе с относящимися к нему равенствами и на пучки прямых.

На рисунке 9 проективное соответствие $ABCD\ldots \overline{\wedge}$ $\overline{\wedge} A''B''C''D''\ldots$ было получено при помощи двух заранее заданных перспектив: $ABCD\ldots \overset{=}{\overline{\wedge}} A'B'C'D'\ldots$ и $A'B'C'D'\ldots \overset{=}{\overline{\wedge}} A''B''C''D''\ldots$ Пусть теперь даны два проективных ряда $ABCD\ldots$ и $A''B''C''D''\ldots$, причем «связывающего» их ряда $A'B'C'D'\ldots$ и точек S_1 и S_2 почему-либо нет. Можно ли в этом случае найти перспективы, переводящие один ряд в другой? И если можно, то как? И сколько их понадобится?

Для ответа на эти вопросы нам придется проделать некоторые интересные построения. Они не сложны, но требуют аккуратности и внимательности. Вы доставите нам, авторам, и себе удовольствие, если выполните эти построения сами.

Итак, возьмем прямую p и на ней точки A, B, C и D. Измерим длины отрезков AC, CB, AD и DB. Подсчитаем сложное отношение $(AB;\ CD)$. Полученное число обозначим q. Итак,

$$(AB;\ CD)=\frac{|AC|}{|CB|}:\frac{|AD|}{|DB|}=q.$$

Возьмем другую прямую p' и на ней три точкп A', B', C' (рис. 10). Проведем прямую через точки A и A' и на этой прямой выберем произвольные точки S_1 и S_2, которые объявим центрами искомых перспектив. Проведем пря-

[1] Порядок, в котором записаны точки в выражении $(AB;\ CD)$, имеет существенное значение; его нельзя менять произвольно!

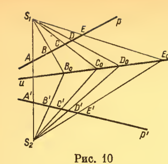


Рис. 10

мые S_1B и S_2B' и точку их пересечения обозначим B_0. Затем проведем прямые S_1C и S_2C'. Они пересекутся в точке C_0. Точки B_0 и C_0 определят прямую u, ее мы назовем *осью перспективы*. Если теперь провести прямую S_1D, то ее пересечение с осью перспективы даст точку D_0, причем ясно, что по свойству перспективы $(A_0B_0;\ C_0D_0) = q$. Соединим теперь точку D_0 с точкой S_2. На прямой p' появилась точка D'. Сложные отношения $(A'B';\ C'D')$ и $(A_0B_0;\ C_0D_0)$ равны. Следовательно, равны и сложные отношения $(AB;\ CD)$ и $(A'B';\ C'D')$ (транзитивность!). Дальше построение можно было бы вести так: на прямой p взять пятую точку E и, проведя S_1E, отметив E_0, соединив E_0 с S_2, получить пятую точку E' на прямой p'. Очевидно, $(AB;\ CE) = (A_0B_0;\ C_0E_0) = (A'B';\ C'E')$. Продолжая в том же духе, мы получим один проективный ряд из другого двумя перспективами. Мы полностью ответили на все вопросы!

Попутно отметим еще одну немаловажную деталь. Если бы мы взяли и на первой прямой только три точки, то установить проективное соответствие нам бы все равно удалось. А если взять не три пары точек, а только две (по две точки на каждой прямой)? Сразу видно, что прямую AA' и центры проекций еще можно построить, но ось перспективы не будет определена, так как точка B_0 получится, а точка C_0 — нет. Напрашивается вывод: для задания проективного соответствия двух точечных рядов необходимо иметь три пары соответственных точек (по три точки на каждой прямой). Мы вернемся к этому факту в пятой главе, а сейчас вновь обратимся к рассуждениям Штейнера.

Мы убедились, что прямые, соединяющие соответственные точки двух проективных, но не перспективных рядов (прямые AA'', BB'', CC'', DD'' ... на рисунке 9), не пересекаются в одной и той же точке. На «двойственном языке» это прозвучит так: точки пересечения соответственных прямых двух проективных, но не перспективных пучков не лежат на одной и той же прямой. Да, но как

расположены эти точки? Вот соответствующее построение (рис. 11). Точки расположились на какой-то кривой. Можно показать, что эта кривая пересекается с любой прямой не более чем в двух точках. Такие кривые называются *кривыми второго порядка*, так как в аналитической геометрии Декарта они задаются уравнениями второй степени. Там же доказывается, что такими уравнениями задаются гипербола, парабола и эллипс (частным случаем которого является окружность). Мы получили, таким образом, единый способ построения всех кривых второго порядка, способ совершенно естественный, подтверждающий «одинаковость» этих кривых с точки зрения проективной геометрии и не нуждающийся ни в привлечении алгебры, ни в использовании пространственной фигуры — конуса.

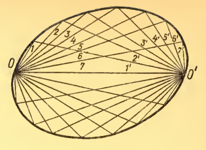


Рис. 11

Двойственное построение — соединение соответствующих точек двух проективных точечных рядов прямыми

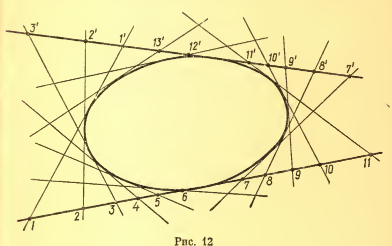


Рис. 12

(рис. 12) — дает совокупность прямых, которые «огибают» (т.е. каждая касается в одной точке) некоторую кривую, называемую обычно «кривой второго класса». Что представляют собой такие кривые? Логически возможны две ситуации: либо это какие-то новые, никогда раньше нам не встречавшиеся кривые, либо это старые знакомые, т.е. кривые второго порядка. Одним из замечательнейших результатов проективной геометрии как раз и было установление того факта, что кривая второго класса является одновременно кривой второго порядка и ничем другим.

Но вернемся к Штейнеру. Какое величественное, чисто геометрическое здание представлялось ему! Вот на основе его простейших элементов в образцовом порядке выстраиваются все теоремы Дезарга, Паскаля и Понселе о кривых второго порядка; вот в пространстве из двух пучков плоскостей строятся поверхности второго порядка; вот возникают кривые третьего порядка и третьего класса (здесь это уже не одно и то же!)... И нет границ для дальнейшего полета мысли...

...И ничего этого Штейнер не сделал. И не только из-за старости и болезней. Главной помехой оказалась недостаточность контактов с другими учеными — следствие его необыкновенной биографии.

В заключение мы приведем еще одну страничку математической биографии Штейнера. Он был хорошо знаком с книгой Л. Маскерони «Геометрия циркуля». В ней показано, что любое построение, выполнимое с помощью циркуля и линейки, может быть выполнено с помощью одного только циркуля. А в проективной геометрии такого инструмента нет, есть только линейка. И в 1833 году была опубликована небольшая книжка Штейнера «Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга». По существу эта книжка посвящена доказательству одного утверждения: если на плоскости имеется всего одна вычерченная окружность, то можно, обходясь только линейкой, выполнить все те построения, которые выполнимы при помощи циркуля и линейки. Этот факт имеет большое теоретическое и практическое значение и излагается почти во всех руководствах по элементарной геометрии.

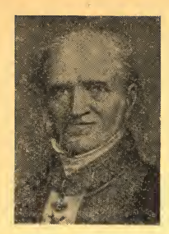
Глава четвертая

ПАРИЖСКИЕ НРАВЫ

Французы, родившиеся в 90-х годах XVIII века, опоздали и к набату революции, и под знамена ее блистательного могильщика — императора. Создатель начертательной геометрии, Монж, в годы революции занимался и наукой и политикой, Понселе стал ученым в плену, а вернувшись на родину, сделался государственным деятелем. Но ученые следующего поколения были другими. Другим был и родившийся в 1793 году Мишель Шаль. Окончив Политехническую школу, он переселился в провинциальный Шартр, городок, известный лишь древним собором и текстильными фабриками, занялся банковской деятельностью и использовал свои незаурядные способности прежде всего для того, чтобы нажить приличное состояние.

Но банкира влекла к себе геометрия. Чтобы как-то удовлетворить тягу к науке (преподавать в Шартре было некому, говорить о геометрии не с кем), чтобы не отвыкнуть от нее, Шаль начал собирать и изучать книги и рукописи по геометрии. Он стал одним из первых в науке и первым в геометрии коллекционером манускриптов и первым настоящим историком геометрии.

Однако, платя не задумываясь большие деньги за каждую старую рукопись, Шаль неизбежно должен был стать жертвой жуликов. В течение трех лет он поражал мир публикациями из приобретенной им коллекции автографов. Сначала сообщения солидного ученого не вызывали никаких сомнений. Но когда появилось «письмо Блеза Паскаля Роберту Бойлю», из которого следовало,



Мишель Шаль

что Паскаль установил закон всемирного тяготения, по крайней мере, за тридцать лет до Ньютона, англичане вступились за честь отечественной науки. Шаль сумел защититься. Однако после категорического заявления комиссии Флорентийской Академии о том, что опубликованное Шалем письмо Галилео Галилея является подделкой, Шаль сдался и потребовал привлечь к суду того талантливого мошенника, который долгие годы поставлял ему «манускрипты».

В зале суда стоял неудержимый хохот, когда прокурор сообщил, что в коллекции имеются, например, письма Александра Македонского к Аристотелю, пророка Магомета к королю Франции, Лауры к Петрарке и даже Иуды Искариотского к Марии Магдалине! Может быть, только характерная для парижан любовь к юмору позволила жулику отделаться сравнительно легким наказанием. А для академика Шаля это был лишь небольшой, хотя и весьма неприятный эпизод. Он дожил до глубокой старости и умер в 1880 году — совсем не так, как покончивший самоубийством академик Астье-Рею, герой романа «Бессмертный», автор которого, Альфонс Доде, воспользовался историей с Шалем для создания острой сатиры на парижские нравы.

Первым сочинением, принесшим Шалю прочную популярность в мире науки, был капитальный «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов», изданный в Брюсселе в 1837 году. Этот обзор содержит первую подробную персонифицированную историю геометрии. Впервые можно было узнать не только что́ доказано геометрами, но и как возникали и развивались методы геометрического исследования. Уже в 1839 году «Обзор» был переведен на немецкий язык, а в 1871 году знаменитое (тогда еще только возникшее) Московское математическое общество начало печатание «Обзора» на русском языке.

Каждая из первых пяти глав книги Шаля посвящена одной из эпох истории геометрии: древние греки, Паскаль и Дезарг, аналитическая геометрия Декарта, Ньютон и Эйлер, Монж и «новейшие методы геометрии». Каждая глава-эпоха разбита на несколько параграфов, посвященных творчеству отдельных геометров. Автор сознательно сохраняет позу нейтрального свидетеля-летописца, так как он намерен в заключительной главе высказать те выводы о прошлом и будущем геометрии, к которым пришел сам и к которым — он убежден в этом! — не может не прийти всякий добросовестный и терпеливый читатель.

Шаль так и говорит: «...указанные нами методы рассеяны по мемуарам[1], чтение которых может оказаться долгим и трудным по причине множества содержащихся в них новых результатов. В этом, я думаю, заключается настоящая причина невнимания к современной рациональной геометрии; вследствие весьма жалкого недоразумения думают, будто бы она представляет собой хаос новых предложений, открытых случайно, не имеющих ни связи между собою, ни значения для сколько-нибудь существенного развития науки о пространстве. Стараясь устранить это недоразумение, мы сочли полезным собрать все частные и разрозненные предложения и вывести их из немногих наиболее общих истин, находящихся в соотношении с указанными нами методами...».

Шаль, как и Штейнер, говорит о хаосе. Только Штейнер имел в виду хаос старой геометрии, а Шаль беспокоился о неверном понимании новой. По существу же, говоря современным языком, мысль Шаля можно сформулировать так: только зная историческое развитие идей той или иной науки, можно изложить содержание этой науки логически. Логическое изложение короче и ближе к практическому применению, но без знания истории идей науку развивать невозможно. Это соотношение между историческим и логическим является краеугольным камнем не только истории наук, но и основой теории их преподавания — фундаментом педагогики и частных методик.

В «Обзоре» Шаль сформулировал два общих принципа геометрии (фактически это принципы проективной

[1] Т. е. по большим научным статьям.

2—885

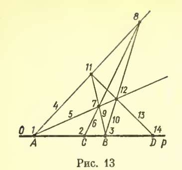


Рис. 13

геометрии): принцип двойственности (мы уже знаем, что это такое) и принцип гомографии. Последний термин происходит от греческих слов «гомос» — подобный (помните, в школе изучалась гомотетия?) и «графо» — пишу, рисую. Он обозначает, по существу, проективное преобразование самого общего вида, т.е. преобразование, сохраняющее «линейность» (точка преобразуется в точку, прямая—в прямую, плоскость— в плоскость) и являющееся естественным обобщением перспективы. Шаль подчеркивает, что основным и единственным инвариантом и относительно преобразования по принципу двойственности, и относительно гомографии является сложное отношение. Все это в общем-то не ново, но изложено общедоступно, следовательно, немедленно может быть продолжено! И Шаль продолжил!

Однако в отличие от Штейнера, всячески изгонявшего дух алгебры и вычислений из геометрии, Шаль широко использовал алгебраические понятия, придавая им геометрическую окраску.

Чтобы разобраться в ходе рассуждений Шаля, рассмотрим сначала одну задачу, решенную еще Дезаргом: «Построить на прямой точку, которая образует гармоническую четверку с тремя данными». Дезарг провел следующее построение (рис. 13), в котором точки и прямые занумерованы в порядке их появления: точки *1*, *2*, *3* на прямой *p* даны сразу, через точку *1* проводятся две произвольные прямые *4* и *5*, затем через точку *2* — произвольная прямая *6*, затем находятся точки *7* и *8* ее пересечения с прямыми *4* и *5*, через каждую из этих точек и точку *3* проводятся прямые *9* и *10*, получаются точки *11* и *12*, через них проводится прямая *13*, которая и пересекает исходную прямую *p* в точке *14*. Дезарг доказал, что эта точка является искомой четвертой гармонической к точкам *1*, *2* и *3*. Напомним, что для гармонической четверки точек A, B, C, D всегда $(AB;\ CD) = 1$.

В проективной геометрии сложное отношение («отношение отношений») — основной инвариант и, конечно,

это отношение вовсе не обязательно должно равняться единице. Естественно попытаться обобщить задачу. Пусть, например, даны три точки A, B, C и надо найти такую точку D, чтобы

$$(AB;\ CD) = \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|} = 2.$$

Иначе говоря, надо найти такую точку D, чтобы, если $|AC| : |CB| = q$, то $|AD| : |DB| = \frac{1}{2} q$. Например, на рисунке 14 $|AC| : |CB| = 6$ (мы здесь просто измерили длины отрезков и нашли их отношение). Мы хотим найти такую точку D, чтобы $|AD| : |DB| = 3$ (тогда будет $(AB;\ CD) = 6 : 3 = 2$ — нам ведь это и нужно в конечном итоге!). Нетрудно заметить, что и для точки D_1 имеем $|AD_1| : |D_1B| = 3$, и для точки D_2 — тоже $|AD_2| : |D_2B| = 3$. Мы получили два решения. Иначе говоря, двум совершенно различным построениям соответствует одна и та же формула.

Различие, конечно, в расположении точек. Древние сказали бы так: «Точка D_1 — внутри отрезка AB, а точка D_2 — вне его». В проективной геометрии принято говорить, что пара точек C и D_1 *не разделяет* пару точек A и B (весь отрезок D_1C принадлежит отрезку AB), а пара точек D_2 и C *разделяет* пару A, B (отрезки AB и D_2C имеют только общую часть CB, но ни один из них не принадлежит другому целиком). Мы еще вернемся к этой картине и подробно поговорим о «разделенности» и «неразделенности», а пока, следуя Шалю, подумаем, как добиться того, чтобы при любом p (у нас было $p = 2$) получилось единственное решение, как и при $p = 1$.

Шаль предложил естественный выход, который легко понять современному школьнику. Следуя Шалю, зададим на прямой положительное направление и масштаб. При заданном масштабе и ориентации каждому отрезку AB соответствует единственное число. Ну и что? Это делалось в алгебре и анализе задолго до Шаля: на обыч-

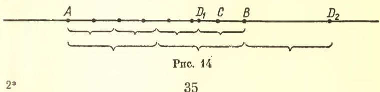


Рис. 14

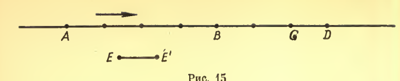


Рис. 15

ной числовой оси каждой точке ставилось в соответствие положительное или отрицательное число (координата) — как на термометре. Сама числовая ось обязательно имела нулевую точку — начало отсчета. Вот последней-то «мелочи» у Шаля пока и нет. Поэтому у него речь идет не о точках, а об отрезках: каждому отрезку соответствует единственное число. Шаль предлагает обозначать это число теми же буквами, что и сам отрезок, и называть его «направленным отрезком». Например, на рисунке 15 $AB = 4$, $BA = -4$ и т.д.

Бо́льшая часть основного труда Шаля — «Руководство высшей геометрии» — и состоит в получении таких соотношений между направленными отрезками, которые сохраняются (остаются инвариантными) при произвольных изменениях ориентации и масштаба.

Простейшим из них является соотношение $AB = (-1) \cdot BA$ (здесь AB — число и умножать его на -1 имеет смысл), или $AB = -BA$ (знак «минус» перед числом BA означает всего лишь умножение числа на минус единицу), или

$$AB + BA = 0. \tag{1}$$

Это соотношение верно для любых двух точек на прямой при любом масштабе и любой ориентации! Теперь математик сказал бы: «инвариантное соотношение».

А для любых трех точек Шаль формулирует следующий результат.

Основная теорема: Если мы возьмем, в каком угодно порядке, три точки A, B, C на одной и той же прямой, то сумма трех последовательных отрезков AB, BC и CA всегда равна нулю:

$$AB + BC + CA = 0. \tag{2}$$

Для доказательства Шаль проверяет это равенство для всех трех возможных расположений точки C соотносительно заданных A и B (рис. 16).

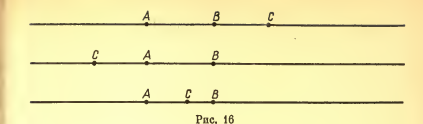


Рис. 16

Вот эта-то основная теорема и получила название теоремы Шаля. Может показаться странным, что имя столь знаменитого геометра присвоено такой простой теореме. Но ведь всякий студент (т.е. будущий математик, физик, инженер, конструктор), начиная работать с направленными отрезками, обязательно произнесет его имя. И поэтому имя это навечно сохранится в науке — самая высокая почесть для ученого, не сравнимая ни с какими прижизненными премиями и дипломами.

Далее Шаль обобщает основную теорему в различных направлениях. Но главным для развития науки было открытие Шалем новых проективных теорем о сложных отношениях четверок точек.

Вернемся к нашим построениям. Теперь, с учетом знаков отрезков, два построения точки D по трем точкам A, B, C и заданному сложному отношению $(AB;\ CD) = 2$ отличны друг от друга, т.е. задача становится вполне определенной. В самом деле (см. рис. 14), мы теперь уже не можем записать, что $AD_2 : D_2B = 3$, так как $AD_2 = 12$, а $D_2B = -4$. Значит, это отношение равно -3 и точка D_2 не дает решения задачи, ибо

$$(AB;\ CD_2) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD_2}{D_2B} = 6 : (-3) = -2.$$

Точка же D_1 — искомая (и к тому же единственная!), ибо $AD_1 : D_1B = 3$ и $(AB;\ CD_1) = 6 : 3 = 2$.

Штейнеру приходилось ликвидировать двузначность решения этой задачи, указывая каждый раз порядок, в котором располагаются точки, дающие ее решение. В образцовом хозяйстве Штейнера это выглядело существенным недостатком.

Правило знаков Шаля устраняло этот недостаток. Кроме того, знак сложного отношения приобретает те-

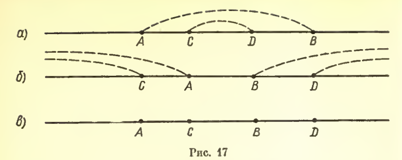


Рис. 17

перь вполне отчетливый геометрический смысл. Прежде всего подчеркнем, что проективная прямая замкнута: она получается замыканием евклидовой прямой посредством несобственной точки. Поэтому две точки A и B определяют на этой прямой два «отрезка»: один из них содержит несобственную точку (будем обозначать его $[A \infty B]$), другой — не содержит (его будем обозначать $[AB]$). Если $[CD] \subset [AB]$ или $[CD] \subset [A \infty B]$, то сложное отношение положительно, так как отношение $AC : CB$ и $AD : DB$ имеют одинаковые знаки (рис. 17, *а*, *б*). В противном случае (рис. 17, *в*) сложное отношение отрицательно. Принято говорить, что в первом случае пары точек A, B и C, D *не разделяют*, а во втором — *разделяют* друг друга.

Наглядность отношения «разделять» и «не разделять» увеличивается при переходе к пучку прямых. Например, на рисунке 18 хорошо видно, что пара лучей c и d не разделяет пару лучей a и b, но пара лучей b и d разделяет пару лучей a и c. Но ведь то же самое имеет место и для перспективных этим лучам точек A, B, C и D!

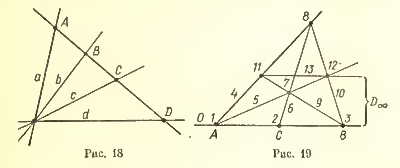


Рис. 18

Рис. 19

Заметим еще, что гармоническая четверка точек всегда состоит из разделяющих друг друга пар (на рисунке 13 это пары *1*, *3* и *2*, *14*) и что теперь их сложное отношение надо считать равным минус единице (а не просто единице, как это было до Шаля). Найдем еще четвертую гармоническую точку D для случая, когда точка C находится посредине отрезка AB. Повторив построения Дезарга (советуем проделать это!), увидим, что прямая *13* станет параллельной прямой AB. Но для нас это теперь вовсе не исключительный случай: просто четвертая гармоническая точка стала несобственной («точка» D_∞ на рисунке 19), а отношение отрезков $AD_\infty : D_\infty B$ и сложное отношение $(AB;\ CD_\infty)$ равны минус единице.

После введения правила знаков Шаля сложные отношения стали выражаться не только положительными, но и отрицательными числами. Иррациональными числами сложные отношения могли выражаться и до Шаля. Значит, в проективной геометрии заработало все множество действительных чисел. Но Шалю и этого оказалось мало. Популяризатор новых и трудных математических теорий и понятий, он смело пользуется не только несобственными элементами, введенным Дезаргом и Понселе, но еще и мнимыми, которых Штейнер вообще не признавал. Позднее, когда математики поднялись на более высокую ступень абстракции, мнимые числа перестали быть «мнимыми», «вымышленными» и т. п., но как раз этому преодолению предубеждений против абстрактных понятий немало способствовало свободное обращение с ними таких людей, как Шаль, показывавших, как при помощи этих «вымышленных» понятий получаются простые решения совершенно не вымышленных наглядных задач.

Вот важный пример. Еще в первой главе мы определяли поляру точки M относительно окружности (см. рис. 3). Если подвергнуть окружность, точки касания T_1 и T_2, касательные прямые MT_1 и MT_2 и диаметр AB (а с ним и точки M и N) центральному проектированию, то окружность превратится в произвольную кривую второго порядка, диаметр — в произвольную секущую, касательные останутся касательными... А гармонизм точек A, B, M, N сохранится. Отсюда (рис. 20) следует, что та часть поляры, которая находится «внутри» кривой, может быть определена как множество четвертых гармонических то-

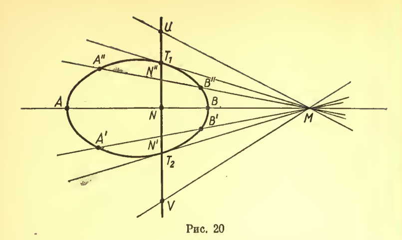


Рис. 20

чек относительно полюса M и точек пересечения всех секущих с кривой.

Но полярой мы раньше называли всю прямую $T_1 T_2$, а по новому определению получили только отрезок $T_1 T_2$! Нужды нет! Будем считать, что прямые MU, MV ... пересекают окружность в мнимых точках. И все пойдет... Только как это истолковать геометрически? В аналитической геометрии все дело свелось бы к решению системы из одного квадратного (окружность) и одного линейного (прямая, проходящая через данную точку) уравнений. Коэффициенты получающегося в итоге квадратного уравнения менялись бы вместе с вращением прямой вокруг точки M и дискриминант был бы положителен для секущих, равен нулю для касательных и отрицателен для прямых, не имеющих общих точек с окружностью. Соответственно корням квадратного уравнения и получились бы две различные точки, или одна точка касания, или две мнимые точки. И все хорошо, но ведь это и есть «иероглифы анализа», а мы пока против всякой аналитики. А не зря ли? Будущее покажет...

Глава пятая

ГЕОМЕТРИЯ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЙ. ТРАДИЦИОННЫЕ ПРОФЕССОРА

Проницательный читатель, наверное, заметил некоторую нелогичность в нашем изложении. Действительно, важнейшим фактом, установленным еще Дезаргом, является инвариантность сложного отношения при проектировании. Но что такое сложное отношение? Это «отношение двух отношений». Как оно получается? Отыскивая первое отношение, мы измеряем длины двух отрезков, затем приходится измерять длины двух других отрезков. Итак, все начинается с измерения отрезков, с их длины. Но ведь как раз длина прежде всего и меняется при проектировании, она не является его инвариантом! Иными словами, главный инвариант проективной геометрии определяется через понятие, не являющееся проективным, и получается, что проективная геометрия есть любопытный, но частный раздел геометрии Евклида.

На первый взгляд представляется, что это именно так. Средняя школа воспитала в нас весьма уважительное отношение к длине, к измерению (вспомните про катет, лежащий против угла в 30°, вспомните теорему Пифагора, вспомните задачи на вычисление площадей и объемов, особенно с применением тригонометрии, — всюду: «сколько?», «во сколько?», «чему равно?»). Зачем же так возмущаться присутствием измерений в проективной геометрии? Стоит ли лишаться понятия длины, этого старого и привычного знакомого? Да, стоит, если мы хотим получить новую геометрию, не опирающуюся на измерения, не использующую понятие длины.

Впрочем, ни рано ушедший от науки Понселе, ни

упрямый Штейнер, ни блестящий, но несколько поверхностный Шаль не ставили и не могли ставить задачу «очищения геометрии от скверны измерений» и поэтому не могли придать идее, которую они разрабатывали, достаточную фундаментальность и внутреннюю законченность. Всем им явно не хватало систематичности. Может быть, потому, что ни банкир Шаль, ни государственный деятель Понселе, ни тяжелобольной Штейнер не хотели или не могли посвятить всю жизнь только науке. Здесь нужен ученый несколько иного склада, здесь нужен «традиционный профессор» — человек, далекий от жизни и от суеты больших городов, занятый одной «чистой наукой», живущий настолько размеренно, что обыватели сверяют часы по фигуре господина профессора, совершающего в одно и то же время и в одном и том же одеянии свой ежедневный моцион. «Он всегда рассеян. Он считает, что потерял зонтик, а у него по зонтику в каждой руке. Он предпочитает стоять лицом к доске, а спиной к классу. Он пишет a, говорит b, имеет в виду c, а должно быть d»[1]... Примерно таким был великий Гаусс. На него старались походить все его (весьма немногие) ученики, им подражали (уже довольно многочисленные) ученики его учеников. Обыватели смеялись над ними при жизни, преуспевающие дилетанты смеются и после их смерти, и только настоящие ученые могут оценить их заслуги. Бурный XX век заставил и «традиционных профессоров» стать активными членами общества. Но в XIX веке, особенно во второй его половине, довольно многим еще удавалось замыкаться в «чистой науке».

Удавалось это и Карлу Георгу Христиану фон Штаудту (1798—1867). Родовитый дворянин из Южной Германии, учившийся у Гаусса, получивший профессуру в небольшом университете Эрлангена довольно поздно (ему было уже 37 лет) и оставшийся там до конца жизни, Штаудт был мало известен современникам. Он не стремился к популярности, вполне удовлетворялся репутацией «традиционного профессора», что, может быть, и позволило ему дожить до завершения и публикации основного труда, который был назван «Геометрией положения» (четыре части его вышли в свет в 1847, 1856, 1857 и 1860 годах). Феликс Клейн, характеризуя этот труд, отметил содержа-

---

[1] Пойа Д. Как решать задачу? М., 1961, с. 193.

щееся в нем «исключительное богатство мыслей, изложенных в безукоризненно строгой, подчас даже отчеканенной до безжизненности форме». Он признал также, что для него, Клейна, «манера изложения Штаудта всегда была недоступной», что он усвоил идеи Штаудта только по пересказам сокурсника... А ведь как раз Клейн стал наследником Штаудта не только в идейном отношении (об этом — ниже), но и в служебном: через 4 года после смерти Штаудта он занял его кафедру. Между прочим, именно манера излагать даже самые лучшие результаты в «безжизненной», недоступной даже специалистам форме снискала многим немецким ученым столь нелестную репутацию, что в русском языке эпитет «гелертерский» (от немецкого Gelehrte — ученый) стал означать нечто одиозное[1].

Однако если форма изложения у Штаудта заслуживает осуждения, то содержание его труда несравненно глубже и важнее, чем содержание популярных работ Шаля и самобытных, но незавершенных трудов Штейнера, ибо именно Штаудт показал, как можно в проективной геометрии обходиться без измерений.

Вот что говорит Штаудт о гармонической четверке точек, с которой, как уже давно понял читатель, и начинается проективная геометрия: «Если на прямой даны три точки *1*, *2*, *3*, то точка *14*, найденная построением Дезарга — Штейнера, **называется** четвертой гармонической к точкам *1*, *2*, *3* и гармонически сопряженной с точкой *2* относительно точек *1* и *3*» (см. рис. 13). Называется! В этом слове вся суть: ведь раньше мы считали четвертой гармонической к трем данным точкам A, B, C такую точку D, чтобы выполнялось равенство отношений $AC : CB$ и $AD : DB$, и ставили задачу отыскания этой точки по трем данным. Теперь Штаудт предлагает не думать о равенстве каких бы то ни было отношений, ничего не измерять, а просто найти, следуя построению Дезарга — Штейнера, некоторую определенную точку по данным трем и назвать ее четвертой гармонической. Все получается замечательно, если не обращать внимания на одно «но»!

[1] См., например, у В. И. Ленина: «Гениальность Маркса и Энгельса и проявилась, между прочим, в том, что они презирали гелертерскую игру в новые словечки, мудреные термины...» (Полн. собр. соч. 5-е изд., т. 18, с. 150).

Вспомним построение Дезарга — Штейнера. Точки *1*, *2*, *3* даны. Прямые *4*, *5*, *6* проводятся произвольно. А вдруг, если мы проведем их как-то по-другому, положение точки с номером *14* изменится? Иначе говоря, определяется ли положение точки *14* однозначно? Используя понятие длины, это доказал еще Дезарг. А если обойтись без измерения длин? Тогда потребуется чисто проективное доказательство. И Штаудт его нашел!

Гармонизм, определенный проективно и однозначно, можно теперь взять за определение проективно соответственных рядов точек — основы основ теории зависимости геометрических образов друг от друга, построенной Штейнером. А раз так, то и для пучков прямых, и для кривых второго порядка и т. д. нет нужды в каких-либо измерениях. Вся надстройка сохраняется, а база стала чисто проективной!

Оказывается, можно пойти еще дальше и задавать проективное соответствие, не только ничего не измеряя, но и не выполняя операции проектирования! Штаудт ввел следующее определение: «Два ряда точек называются *проективными*, если каждой точке одного ряда отвечает вполне определенная (т.е. единственная) точка другого и каждым четырем гармоническим точкам одного ряда соответствуют четыре гармонические точки другого». Коль скоро гармоническую четверку можно определить, пользуясь построением Дезарга — Штейнера (см. рис. 13), которое не содержит проектирований и не связано с измерениями, то штаудтовское определение проективных рядов решает задачу!

Еще Штейнер показал, что проективное соответствие образов первой ступени может быть определено заданием трех пар соответствующих элементов (см. гл. 3). Этот результат известен как «основная теорема проективной геометрии».

Штаудт придал основной теореме следующую формулировку (в этой формулировке она называется теоремой Штаудта — более глубокий, чем Шаль, ученый «награжден» и более глубокой теоремой): «В проективном соответствии, установленном между точками одной и той же прямой, не может существовать более двух двойных точек (т.е. точек, соответствующих самим себе), если соответствие не сводится к тождественному».

Легко видеть, что такая формулировка теоремы не-

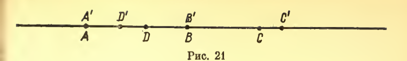


Рис. 21

посредственно вытекает из предыдущей, только вникните спачала в слова: «между точками одной и той же прямой». Что получается по основной теореме? Даны три пары соответственных точек двух различных точечных рядов. Если взять некоторую четвертую точку первого ряда, то на втором найдется единственная соответственная ей точка, т.е. проективное соответствие установлено. А по теореме Штаудта? Мы хотим установить проективное соответствие между двумя рядами точек, находящихся на одной и той же прямой. Начать надо с заданных пар соответственных точек. Эти точки могут быть различными (тогда все ясно), но некоторые могут и совпадать. Если допустить совпадение трех пар точек, совпадут и четвертые, т.е. соответствие превратится в тождественное. А если взять две пары совпадающих точек, а третью пару — не совпадающих? Тогда и точки четвертой и всех последующих пар не совпадут и получится два проективных точечных ряда с двумя двойными элементами (рис. 21).

Из теоремы, получившей впоследствии его имя, Штаудт извлек два следствия: возможность введения проективных координат и проективную геометрическую интерпретацию комплексных чисел. Все это получилось очень изящно именно потому, что Штаудт нашел чисто проективное доказательство основной теоремы.

Именно в этом и заключается историческая заслуга Штаудта: он очень хорошо зафиксировал идею независимости проективной геометрии от измерений. И благодаря этому развитие проективной геометрии после Штаудта и на основе его трудов пошло значительно быстрее, чем при нем и до него.

И все же... В истории науки давно установлено, что ни одна математическая теория в том виде, в каком она была построена первоначально, не бывает свободна от более или менее значительных дефектов, выясняющихся на следующих ступенях ее развития. Первооткрывателю важно прежде всего зафиксировать идею, сформулировать результат и сделать первый набросок доказательства. Детали можно будет доделать потом, на следующем

этапе развития теории. Однако от того, насколько хорошо зафиксирована идея, зависит многое: скорость развития новой теории, ее распространение и признание. Так было с гениальными идеями Ньютона и Лейбница в математическом анализе, так было с теорией вероятностей, с кибернетикой...

Не могло быть иначе и с идеей Штаудта: в его рассуждении имеется существенный дефект, который не мог быть преодолен на уровне, достигнутом математикой сто лет назад. К сущности самого дефекта мы еще вернемся, а сейчас отметим, что одной из причин возникновения трудностей, встретившихся математикам XIX века, было отсутствие четкого разграничения логической и интуитивной части математики.

— Что есть истина? — спрашивали себя математики.

— То, что доказано.

— А что значит «доказано»?

— Это значит: выведено логическими рассуждениями.

— Выведено? Из чего выведено?

— Из предыдущих истин, из теорем.

— Из чего же выведены первые теоремы? Где этому начало?

— Начало — то, что очевидно.

— А что значит «очевидно»? Кому «очевидно»? Вам очевидно, а мне сомнительно...

И вот на последний-то вопрос тогдашние математики не могли дать четкого ответа, хотя еще великий Евклид сделал первую попытку сформулировать «очевидные истины». Предложения, с «которых все начинается», он назвал «аксиомами» и «постулатами», т.е. «истинами, не требующими доказательств», истинами, познаваемыми не логикой, не умозрительно, не рассуждениями, а интуицией, непосредственным опытом человека.

Евклид сформулировал аксиомы и постулаты геометрии так удачно, что все они, кроме одного, «пятого постулата», более двух тысяч лет не вызывали никаких сомнений. Такого испытания временем не выдержал ни один из сформулированных людьми «законов природы» — все их пришлось уточнять гораздо скорее. Но дошла очередь и до аксиом Евклида.

Толчком к стремлению «исправить Евклида» послужил именно пятый постулат. У Евклида было объявлено истиной, не требующей доказательства, что если сумма

внутренних односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей, меньше 180°, то эти две прямые пересекаются.



Давид Гильберт

Эта истина менее очевидна, чем, например, такая: две точки определяют единственную, содержащую их, прямую. И поэтому-то пятый постулат и вызвал столько раздумий и попыток доказать его, т.е. вывести как логическое следствие из других аксиом Евклида.

Так возникла проблема пятого постулата. Великий Лобачевский решил ее, доказав логическую возможность геометрии, в которой пятый постулат заменен другим.

Штаудт бился над таким же «очевидным» предложением: можно ли при помощи чисто проективных построений Дезарга — Штейнера получить все точки данной прямой, начав с трех данных? Что можно получить много и даже сколь угодно много, бесконечно много — понятно, а вот все до одной? Вопрос упирался в «аксиому непрерывности», о которой Евклид не говорил. На эту аксиому опирался еще Архимед, но по-настоящему ее значение установил только в конце XIX века Д. Гильберт в эпохальном труде «Основания геометрии».

Давид Гильберт (1862—1943) почти всю жизнь провел в Геттингене — одном из типичных «малых» университетских городов. Он был, по-видимому, одним из последних немецких ученых «традиционного типа». Анекдотов о нем обычно не рассказывают, более того, часто подчеркивается необычная широта его кругозора, уверенность в силе человеческого разума и колоссальных возможностях науки. Недаром одна из его работ заканчивается гордыми словами: «Мы должны знать — мы будем знать!».

Гильберт не стал служить фашизму, как сделали почти все из оставшихся в живых и не эмигрировавших из Германии после прихода Гитлера к власти. Семидесяти-

летний ученый просто «остался не у дел», хотя его творческие способности не угасли.

Гильберт является автором исторического доклада «Математические проблемы», сделанного им на пороге нового века — на Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Доклад этот прозвучал как своеобразное завещание девятнадцатого века двадцатому и во многом определил пути развития математики нашего времени. Решение хотя бы одной из «проблем Гильберта» до сих пор считается огромным достижением.

Сущность аксиоматического метода, впервые отчетливо сформулированная Гильбертом, проста, как всякая глубокая идея. Гильберт не убегает, как это делали почти все математики после Евклида, от сакраментальных вопросов, сформулированных выше в шутливом диалоге, а кардинально решает их. На вопрос «что значит очевидно?» он смело и решительно отвечает: то, что лежит вне математики, то, что не подлежит доказательству средствами логики, тот минимум, который математика берет из внешнего мира, от которого при всей своей абстрактности она все-таки не может и не должна отрываться. Проблема состоит не в том, чтобы доказывать или опровергать «очевидные» предложения (вроде пятого постулата), не в том, чтобы искать определения простейших понятий (что называется точкой, множеством), а в том, чтобы отчетливо выделить эти понятия, дать им названия и к ним, но уже только к ним, применять логику.

Возьмем, например, планиметрию. Не надо определять понятия «точка» и «прямая». Ведь «определять» — значит свести к более простому. А проще в планиметрии ничего нет! Не надо логически выводить (нéоткуда!), что означают выражения «точка лежит на прямой» или «прямая проходит через точку». Надо только назвать это «отношение» между ними, ну, например, так, как это давно делают проективисты «отношением инцидентности».

Не надо доказывать, что:

а) всяким двум различным точкам инцидентна одна (и только одна) прямая;

б) существуют три точки, не инцидентные никакой прямой одновременно, а каждой прямой инцидентны, по крайней мере, две точки.

Надо просто объявить эти предложения аксиомами. А уж из них выводить логически, что, например, две раз-

личные прямые инцидентны не более чем одной точке.

Конечно, из сказанного не следует, что объявлять аксиомами можно любые предложения в соответствии с благими пожеланиями авторов. Читатель, наверно, хорошо понимает, что аксиомы не должны противоречить друг другу. Кроме того, их должно быть столько, чтобы на их основе можно было логическим путем построить достаточно полную, насыщенную содержанием теорию. В то же время едва ли стоит иметь «лишние» аксиомы, т.е. называть аксиомами те предложения, которые логически вытекают из ранее сформулированных. Анализ той или иной системы аксиом с точки зрения этих требований довольно сложен и очень интересен.

Гильберт сформулировал пять групп аксиом. Часть аксиом первой группы, относящаяся к планиметрии, приведена выше.

Во второй группе речь идет о порядке расположения точек на прямой. В частности, объявляется аксиомой, что «между двумя точками на прямой имеется еще хотя бы одна точка».

Но, что означает «между», определить нельзя! И не надо! Надо лишь добавить еще несколько аксиом. Правда, тех, кто не забыл программу VI класса, это может смутить: ведь в учебнике геометрии под редакцией А. Н. Колмогорова сформулировано определение понятия «лежать между»! Но никакого противоречия здесь нет: просто в школьном учебнике взяты другие аксиомы (не по Гильберту), поэтому появились и другие определения.

Мы же пока будем говорить о системе аксиом Гильберта, так как после Евклида это была исторически первая «настоящая» система аксиом геометрии. Всех аксиом мы не будем перечислять. Но подчеркнем, что из первой же аксиомы второй группы логически вытекает наличие бесконечного множества точек на прямой: если в силу аксиомы между точками A и B есть точка C_1, то по той же причине и между точками A и C_1 есть точка C_2, между точками C_1 и C_2 — точка C_3 и т. д. Но отсюда, между прочим, вовсе не следует, что они, эти точки, лежат на прямой «сплошь», «непрерывно», что на прямой нет «дырок».

Третья группа аксиом Гильберта описывает отношение конгруэнтности отрезков и углов. Вот одна из аксиом этой группы: если $[AB] \cong [A'B']$ и $[A'B'] \cong [A''B'']$,

то $[A''B''] \simeq [AB]$. Это свойство называется «транзитивностью конгруэнтности» (едва ли это очень уж благозвучно, но логике — простор, для логики «транзитивность» также привычна, как для портного игла).

Четвертая группа аксиом постулирует непрерывность расположения точек на прямой, ту самую непрерывность, которая вовсе не следует из второй группы аксиом, ту самую непрерывность, в которую уперся глубокий ум Штаудта и которую долго считали очевидной.

Последней в системе аксиом Гильберта фигурирует аксиома параллельности, равносильная пятому постулату Евклида и хорошо известная каждому еще из курса геометрии VI класса.

Теперь в царстве Евклида воцаряется безупречная логика. Правда, это царство страшно угнетает студентов и у многих отбивает любовь к геометрии. На практике же подавляющее большинство математиков не помнит великолепного гильбертовского списка и опирается на интуицию точно так же, как и школьники.

Зато в геометрии Лобачевского и других неевклидовых геометриях без аксиом не прожить, ибо там интуиция нередко не только не помогает, а очень мешает.

Показав на самой интуитивной части математики, как можно подчинить ее логике, Гильберт открыл новый путь почти для всех отраслей математики и не только математики. Оказалось, что «очевидные» части большинства математических дисциплин гораздо проще, чем в евклидовой геометрии, что интуиция дает там очень мало и часто обманывает. И все ринулись по этому пути.

Что из этого вышло? Сначала — ужас. Появились сотни аксиоматических теорий. Математики перестали понимать друг дуга: никто не хотел учить «чужие» аксиомы. Но жить-то надо, понимать друг друга надо... И постепенно выяснилось, что различные теории в общем-то во многом сходны. Надо только навести порядок в терминологии, и здание всей математики (а не только геометрии!) приблизится к гильбертовскому идеалу. Этот порядок навел легендарный Никола́ Бурбаки́ — изумительный коллектив французских математиков, опубликовавших под этим псевдонимом математический «роман века». Но о Бурбаки уже столько написано, что мы умолкаем, чтобы вернуться к проективной геометрии, в которой тоже пора навести аксиоматический порядок.

Глава шестая

СНОВА В РОССИИ...

Непосредственным продолжателем исследований Понселе и Штейнера стал член-корреспондент Академии наук заслуженный профессор Константин Алексеевич Андреев (1848—1921), основатель русской школы проективной геометрии.

В 1871 году К.А. Андреев окончил Московский университет и был оставлен при нем «для усовершенствования в науках и для подготовки к профессорскому званию», а в 1873 году его направили в Харьков. Там Андреев провел лучшие годы своей жизни, создал основные труды. Он был одним из учредителей Харьковского математического общества, а затем его президентом.

Для того чтобы выяснить, в чем заключалось выполненное Андреевым развитие идей создателей проективной геометрии, вернемся к тому, чем закончил Штейнер. Помните, в третьей главе сказано: «Ничего этого он не сделал»? Штейнер открыл проективный способ построения кривых второго порядка. Это построение состояло в нахождении точек пересечения прямых, соответствующих друг другу в проективном соответствии двух пучков прямых (см. рис. 11), причем задание такого соответствия сводилось к заданию трех пар общих элементов. Напомним это построение. Имеется пять точек: два центра пучков и три точки пересечения соответственных прямых этих пучков. Этого достаточно, чтобы построить всю кривую второго порядка, ибо в силу основной теоремы проективной геометрии три пары соответственных элементов определяют все проективное соответствие.



К. А. Андреев

Так вот на этом-то и остановился Штейнер, дальше он, действительно, ничего не успел и не смог сделать. А что дальше? Конечно, кривые второго порядка очень важны, но ведь существуют и оказываются нужными во многих делах и более сложные кривые. Какие? Кривые второго порядка есть кривые, пересекающиеся с прямой не более, чем в двух точках. Ясно, что можно рассматривать и кривые, которые при пересечении с прямой дают не более трех точек. Естественно, что их следует называть кривыми третьего порядка. Существуют и кривые четвертого, пятого, шестого, ..., n-го порядка, т.е. кривые, имеющие с прямой не более четырех, пяти, шести, ..., n точек. Но можно ли получить их проективными построениями? Какими? Штейнер не смог ответить на эти вопросы. Шаль размышлял над ними, думал об этом и его переводчик, учитель Андреева, Василий Яковлевич Цингер.

Этой-то проблеме и посвящены важнейшие работы К.А. Андреева — две его диссертации, изданные в 1876—1879 годах отдельными книжками под названиями «О геометрическом образовании плоских кривых» и «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий». Обе работы написаны чрезвычайно просто и довольно подробно. В то же время их содержание и язык достаточно современны и вполне доступны сегодняшнему читателю. Поэтому мы позволим себе привести несколько цитат из этих работ. Вот как предельно отчетливо формулируются в первой из них два возможных пути развития проективной геометрии.

«Вникнув в способ образования кривых второго порядка с помощью рядов точек и пучков прямых, нетрудно увидеть, что обобщающие изменения могут быть двоякого рода. Во-первых, можно подвергнуть обобщению самые орудия образования, т.е. заменить элементарные

формы[1] формами более сложными, оставляя при этом зависимость проективную, связывающую элементы... без изменения. Во-вторых, можно, оставляя за элементарными формами преимущество быть орудиями преобразования и подвергнуть обобщению саму зависимость, связывающую элементы».

Далее К.А. Андреев анализирует труды своих предшественников и замечает, что все они шли по первому пути. Установив, что этот путь, несмотря на всю его естественность, не приводит к достаточно общим результатам, хотя и связан с использованием аналитической геометрии, К. А. Андреев избирает другой путь, путь совершенно новый и неизведанный. Он обобщает «зависимость проективную». Каким образом? Конечно, сохранение гармонизма и сложных отношений необходимо оставить, — в этом сущность «проективности». К.А. Андреев отказывается от однозначности соответствия, причем отказывается самым решительным образом. Сразу рассматривается *взаимно-двузначное соответствие*: пусть каждому лучу Oa одного пучка прямых соответствует не один, а два луча — $O'x$ и $O'y$ — другого. При этом сохраняется равенство сложных отношений:

$$(Oa_1\ Oa_2;\ Oa_3\ Oa_4) = (O'x_1\ O'x_2;\ O'x_3\ O'x_4) = (O'y_1\ O'y_2;\ O'y_3\ O'y_4).$$

Можно ли это осуществить геометрически? Да, существует очень простой прием, являющийся обобщением перспективного соответствия прямолинейных пучков, рассмотренного в четвертой главе. Только вместо одной оси перспективы понадобится три. На исходном рисунке Андреева (рис. 22) O и O' — центры прямолинейных пучков; OA, OB, OC — три исходных луча первого пучка. Из второго пучка мы пока возьмем только один луч — $O'x'$. Но дальше вместо оси перспективы (одной прямой) мы возьмем три произвольные прямые — k, l, m. Луч $O'x'$ пересекает их соответственно в точках α, β, γ. Соединим эти точки с центром O первого пучка лучами $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$. Теперь в точке O имеются не один, а два пучка прямых, а на луче $O'x'$ — две тройки точек (A, B, C и α, β, γ). Установим соответствие между этими тройками: $A \leftrightarrow \alpha$,

[1] Так К. А. Андреев называет точки и прямые.

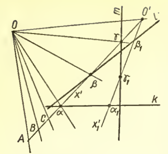


Рис. 22

$B \leftrightarrow \beta$, $C \leftrightarrow \gamma$ (одновременно установится и соответствие между двумя тройками лучей $OA \leftrightarrow O\alpha$, $OB \leftrightarrow O\beta$, $OC \leftrightarrow O\gamma$). Мы знаем, что этого достаточно для получения двух проективно соответствующих точечных рядов и двух проективно соответствующих пучков лучей. В таком соответствии в силу основной теоремы Штаудта (см.гл.V) есть две точки — X и Y (и, конечно, два луча — OX и OY), которые соответствуют сами себе. На чертеже у Андреева они не построены. Их-то и будем считать соответствующими лучу $O'x'$ пучка с центром в O'. Итак,

$$\begin{matrix} OX \\ OY \end{matrix} \rightarrow O'x'.$$

Если взять другой луч второго пучка, например $O'x_1'$, то, конечно, получатся другие точки — α_1, β_1, γ_1, другой точечный ряд и в конечном итоге другие лучи — OX_1 и OY_1 (они будут соответствовать лучу $O'x'_1$). Короче говоря, каждому лучу второго пучка будут соответствовать два луча первого. Нетрудно (хотя и не так уж просто) доказать, что и в другую сторону оно будет проективным и двузначным, т.е. каждому лучу первого пучка будут соответствовать два луча второго пучка:

$$OX \leftarrow \begin{matrix} O'x' \\ O'y' \end{matrix}$$

с сохранением гармонизма. Оказывается при этом, что прямая OO' соответствует сама себе.

Более общее взаимно-двузначное соответствие получится, если один из пучков прямых заменить другим, проективно соответствующим ему пучком: пусть пучок O'' проективно соответствует пучку O', тогда пучки O и O'' будут находиться во взаимно-двузначном проективном соответствии, но не будут являться «перспективно расположенными».

К. А. Андреев показал, что для любых заранее данных взаимно-двузначно проективных пучков можно указать

третий, который перспективно расположен с одним из данных.

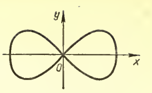


Рис. 23

Пользуясь найденным еще Штейнером способом построения двойных элементов проективных совмещенных пучков, можно выполнить построение какого угодно числа соответствующих лучей в двух произвольно заданных пучках прямых. В книжке К.А. Андреева приводится очень изящный «рецепт» выполнения такого построения при помощи линейки и одного заранее заданного конического сечения (например, окружности).

Отмечая все точки пересечения соответствующих во взаимно-двузначном проективном соответствии лучей двух пучков, мы получим некоторую кривую. Остается выяснить порядок этой кривой, т.е. установить, сколько точек пересечения она может иметь с той или иной прямой. Несложное исследование показывает, что таких точек будет четыре, две или ни одной. Получилась, таким образом, кривая четвертого порядка. Только не самого общего вида, а такая, которая обязательно имеет, по крайней мере, две «двойные точки» (пример такой точки — на рисунке 23). Этими точками, как легко догадаться, будут прежде всего точки O и O' — центры пучков. Если же пучки O и O' перспективны, то получится кривая третьего порядка (причем самого общего вида!).

Это и есть главный результат магистерской диссертации К.А. Андреева: проективное взаимно-двузначное соответствие двух пучков прямых порождает кривые третьего и четвертого порядка.

Остальная часть диссертации посвящена глубокой и подробной классификации найденных кривых на основе выяснения их проективных свойств без использования каких-либо уравнений («чистая геометрия»). Решен и вопрос о том, сколько надо задать точек, чтобы определить по ним единственную содержащую их кривую третьего порядка или кривую четвертого порядка с двумя двойными точками. Для этого достаточно было решить вопрос о том, сколько пар соответствующих лучей определяют то или иное взаимно-двузначное проективное соответствие. Ответ таков: для кривой третьего порядка — девять

точек, для кривой четвертого порядка с двумя двойными точками — десять, в том числе обе двойные.

Мы хотим подчеркнуть, что метод К. А. Андреева не только дает возможность найти все проективные свойства рассматриваемых кривых, не выполняя никаких вычислений, но и возможность фактического построения их по заданным девяти или десяти точкам с любой степенью точности. Это построение несложно, и в наше время получение достаточно большого числа точек искомой кривой может быть поручено электронной вычислительной машине.

В докторской диссертации К. А. Андреев еще более отчетливо сформулировал и развил найденный им метод решения сложнейших задач проективной геометрии.

В творчестве К.А. Андреева есть еще одно очень важное обстоятельство, существенно сказавшееся на дальнейшем развитии проективной геометрии: он — один из первых проективистов, понявших и применивших идеи «Коперника геометрии» — Н.И. Лобачевского, работы которого тогда уже получили всеобщее признание. К.А. Андреев не продолжал исследования Лобачевского непосредственно, но он воспринял его основную идею — необходимость ревизии, уточнения евклидовой аксиоматики, неизбежность аксиоматического обоснования всей геометрии.

Если до него проективную геометрию строили простым «пополнением» евклидова пространства несобственными элементами, то К. А. Андреев не употребляет термины «бесконечно удаленный», «несобственный». Просто он во «Введении» в первую диссертацию формулирует большую часть основных предложений, необходимых для построения проективной геометрии. Анализ этих предложений показывает, что они предвосхищают точное аксиоматическое построение проективной геометрии, которое появится в западноевропейских журналах значительно позже — в начале XX века и будет приведено в безупречное состояние только в 30-х годах Н.А. Глаголевым, учеником К.А. Андреева.

Далее К.А. Андреев всюду опирается только на эти основные предложения и лишь иногда цитирует необходимые ему теоремы Штейнера и Шаля, явно давая понять, что и эти теоремы могут быть выведены логически из основных.

Итак, еще одной заслугой К. А. Андреева является то, что он начал аксиоматическое построение проективной геометрии еще в XIX веке. Начал, но не закончил...



Н. А. Глаголев

В 1898 году К. А. Андреев был переведен на кафедру математики Московского университета, в том же году получил звание заслуженного профессора, стал первым выборным деканом физико-математического факультета (1905—1911). Он активно участвовал в работе Московского математического общества, был председателем Педагогического общества. В эти годы он целиком отдался педагогической и административной деятельности и завоевал большой авторитет на этом поприще.

Тяжелым для него был 1911 год — год разгрома Московского университета реакционным министром Кассо. Из солидарности к подвергшимся преследованиям коллегам К.А. Андреев оставил должность декана и временно прекратил — из-за болезни — чтение лекций. Но болезнь, как это часто бывает в трудные минуты жизни, только обострилась от этого. По-видимому, у него был рак горла. Сделанная в 1913 году операция только отсрочила неизбежное. Вскоре он уже не мог читать лекций и должен был переехать в Крым, где умер в 1921 году, забытый даже родными, тоскуя о Москве, об университете и, видимо, плохо представляя себе сущность грандиозных событий, происходящих в России.

Среди достойных преемников, воспитанных К.А. Андреевым в годы работы в Московском университете, выделяется Нил Александрович Глаголев. Имя последнего хорошо известно всем геометрам и всем преподавателям геометрии в нашей стране. Он является автором наиболее солидного монографического изложения проективной геометрии на русском языке (первое издание «Проективной геометрии», скромно названное «учебником для университетов», вышло в 1936 году). В этой книге не только ис-

черпывающе и доступно изложена теория Штейнера и Штаудта, но и дано аксиоматическое обоснование проективной геометрии.

Н.А. Глаголев является также автором принципиально нового учебника начертательной геометрии и прекрасного учебника геометрии для средней школы. Хотя школьный учебник был трудноват и поэтому не стал стабильным, но его влияние ощущается на всех учебниках, вышедших после него. Н.А. Глаголев переработал замечательный учебник геометрии А.П. Киселева. Несомненно, что рекордное «долгожительство» этому учебнику (более 90 лет!) обеспечили не только талант автора, но и глаголевская обработка.

В наше время проективная геометрия, как таковая, не является «модной» наукой, но последователи К.А. Андреева и Н.А. Глаголева продолжают разрабатывать ее, понимая, что мода — явление временное, а разработка фундаментальных математических дисциплин всегда должна идти сплошным фронтом, обеспечивая тыл и базу модным (в хорошем смысле этого слова, конечно) направлениям. Наиболее сильный коллектив «чистых проективистов» работает в Ярославле под руководством проф. З.А. Скопеца, одного из авторов современного школьного учебника геометрии.

Однако проективная геометрия важна не только сама по себе, но еще и тем, что она оказалась основой многих других геометрий, в том числе и евклидовой. Как это произошло, мы расскажем во второй половине нашей книги.

Глава седьмая

ЭРЛАНГЕН, 1872...

Теплый осенний день 1872 года. Старинный немецкий городок Эрланген. У прогуливающихся вдоль канала Людвига бюргеров немного кружатся головы: совсем недавно кончилась победоносная война с Францией, Баварское королевство вошло в состав новой Германской империи, все говорят о величии германского духа, о миссии немецкого народа — как тут можно оставаться спокойным! Впрочем, может быть, радужное настроение бюргеров связано и с тем, что все полтора десятка эрлангенских пивоваренных заводов работают в полную силу. Бюргеры довольны жизнью и не особенно задумываются о будущем. Они не знают, что их внуки напишут одну из самых мрачных страниц в истории Германии и что соседний Нюрнберг надолго станет ассоциироваться в памяти многих людей с фашистскими «партайтагами» и международным судом над военными преступниками.

Бюргеры не знают и того, что сегодня в их городе произойдет событие, которое надолго прославит Эрланген. Наступит время, когда забудутся события франко-прусской войны, исчезнут из памяти людей имена подручных бесноватого фюрера и его самого. Но навсегда останутся в истории математики те идеи, которые будут провозглашены сегодня на заседании совета Эрлангенского университета.

До начала заседания осталось четверть часа, в конференц-зале уже шумят студенты, появляются профессора. Студентов немного — кто же будет проводить такой хо-

роший день в помещении! К тому же студентов вообще в университете не так уж много — 374 человека на всех четырех факультетах. Да и тема, предложенная совету, — «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» — едва ли может заинтересовать медиков, теологов и юристов. Большинство эрлангенских студентов фланируют по улицам — шумные, задиристые, в разноцветных бархатных шапочках, в сопровождении бульдогов, с которыми они никогда не расстаются. Их чаще можно застать в кафе, пивных и ресторанах, чем в университетских аудиториях, многие из них гораздо лучше разбираются в фехтовании, чем в римском и церковном праве или анатомии. Но среди студентов всегда были, есть и будут другие — любознательные, интересующиеся всем, не пропускающие ни одного важного события. Из них-то и получаются те, кто составит славу университета. Наверное, те, кто пришел сегодня в университет, из таких. О чем они говорят?

— Ты в самом деле его знаешь?

— Конечно. Я ведь тоже из Дюссельдорфа и вместе с ним поступал в Боннский университет. Он очень талантлив, недаром профессор Плюккер уже через год сделал его своим ассистентом по кафедре физики.

— Сколько же ему было тогда лет?

— Я не знаю, но, по-моему, он мой ровесник, значит, ему было тогда семнадцать — поступали-то мы шестнадцати, в 1865 году.

— Поступали вместе. Только он, кажется, собирается сегодня доказать свое право на кафедру, а ты все не можешь одолеть экзамены за второй курс!

— Господин Штумпф, еще одно слово...

Похоже, что дело идет к дуэли, которые в те времена считались делом более важным, чем лекции и экзамены...

А о чем говорят профессора?

— Клейн? Откуда взялся этот Клейн? Вы с ним знакомы, господин тайный советник?

Вопрос обращен к высокому сухопарому старику в сюртуке со звездой.

— Нет, не знаком. И не собираюсь знакомиться. Настоящему германскому университету нужны настоящие немцы, а это кто такой?

— Но, простите, господин тайный советник, Клейн,

кажется, из хорошей семьи. Я слышал, что его отец — чиновник, вполне добропорядочный человек.

— А сын? Он не только не пошел на бой с врагами отечества, но хуже того, так и не отказался от переписки с французами, особенно с этим, как его... я никак не могу запомнить этих варварских имен...

— Вы, надо полагать, имеете в виду господина Дарбу?

— Да-да-да! Вот именно! Кого только нет среди друзей и знакомых Клейна! И англичане, и итальянцы, и даже какой-то норвежец. Ведь были же, слава богу, греки, был наш великий Лейбниц, вспомните, наконец, нашего незабвенного господина фон Штаудта! Неужели нельзя следовать их предначертаниям? И что это за «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований»? Вся геометрия сразу? Я, господа, не математик и не берусь судить о смысле этого трактата, но мне ясно, что господин Клейн хочет взять на себя смелость превзойти Евклида и создать новые «Начала». Не слишком ли?

— Значит, он и есть настоящий немец, следующий в науке примеру его сиятельства рейхсканцлера князя Бисмарка!

— Какой же он Бисмарк, если он ссылается на англичанина Кэли, норвежца Ли, французов Шаля, Галуа, Жордана? — Молодой приват-доцент явно уже успел познакомиться с брошюрой Клейна. К нему, естественно, и обращаются теперь остальные собеседники.

—Не известно ли вам, что думают об этом Клейне настоящие и крупнейшие германские математики, например профессор Вейерштрасс?

— На семинаре у профессора Вейерштрасса в марте минувшего года Клейн ставил вопрос о связи между идеями русского профессора Лобачевского и идеями англичанина Кэли, но господин Вейерштрасс ответил, что это далеко отстоящие друг от друга системы...

— И что же Клейн?

— Сначала согласился, а потом поехал во Францию, там он как раз и подружился с этими французами...

— Вот-вот, я и говорю, что он не является истинным патриотом!

— Но, ваше превосходительство, господин Клейн служил в армии во время войны, и, наверное, не его вина, что он оказался в запасных частях и к тому же заболел тифом. Он не мог участвовать в сражениях!

— Все равно, господа, нам не надо профессоров, которые забывают, что они немцы и готовы сотрудничать чуть ли не с азиатами! — Господин тайный советник явно начинает горячиться, он предвосхищает те времена, когда Германии станут не нужны «неарийцы» и вслед за Эйнштейном, Ремарком, Фейхтвангером родину покинут сотни артистов, художников, писателей, музыкантов и ученых, в том числе и ученики Клейна — Герман Вейль, Рихард Курант и Отто Нейгебауэр. — Что он мог делать, там, во Франции?

— Как раз там его и познакомили с этими новейшими идеями, рассказали о теории групп и...

— Рассказали? Он что, не успел научиться читать?

— Он не очень любит изучать новое по книгам, но, говорят, моментально схватывает все, о чем ему рассказывают. Интересно будет услышать, насколько хорошо он говорит сам, пишет он очень увлекательно.

— Увлекательно? Он что, сочинитель романов? Насколько мне помнится, ни Евклид, ни Лейбниц не стремились к увлекательности изложения. Или и здесь ваш юноша собирается оригинальничать? Не слишком ли...

— Господа, господа, его превосходительство ректор!

...В аудитории наступает тишина.

— Милостивые государи! Между приобретениями, сделанными в области геометрии за последние пятьдесят лет, развитие проективной геометрии занимает первое место. Если в начале казалось, что для нее недоступно изучение так называемых метрических свойств, так как они не остаются без изменения при проектировании, то в новейшее время научились представлять и их с проективной точки зрения, так что теперь проективный метод охватывает всю геометрию...

Так начал Феликс Клейн свою первую лекцию, которая не только обеспечила ему право на кафедру в Эрлангене, но и открыла дорогу в бессмертие. Через двадцать лет, будучи уже маститым ученым, профессором Геттингенского университета и редактором крупнейшего в мире журнала «Mathematische Annalen», Клейн вновь опубликовал текст этой лекции, снабдив его подробными дополнениями и пояснениями. Именно этот текст и стал «каноническим» вариантом «Эрлангенской программы», именно он и переведен на все языки мира.

Сущность и значение «программы» Клейна наиболее

кратко и выразительно сформулировал его ученик и последователь, известный немецкий геометр Вильгельм Бляшке: «От него (т.е. от Клейна) ведет начало геометрическое мышление, базирующееся на рассмотрении непрерывных групп преобразований, а этот образ мыслей является основой всего дальнейшего». Бо́льшая часть Эрлангенской программы как раз и посвящена теории этих групп, на основе которой и сравниваются «новейшие геометрические исследования», производится классификация геометрических фактов и теорий.



Феликс Клейн

Что же такое «непрерывная группа преобразований»? Каждое из трех слов в отдельности — «непрерывность», «группа», «преобразование» — понятно любому человеку и вроде бы не содержит ничего специального, математического. Но их соединение в обычной речи не встречается, это уже чисто математический термин, более того, важнейший термин современной математики. Попробуем разобраться в нем, так сказать, «по порядку».

«Преобразование». Под этим словом понимается почти то же, что и в обычной жизни. Кстати, наш читатель, наверняка не забыл симметрию, параллельный перенос, гомотетию. Мы подробно описывали проектирование: при этом преобразовании одна фигура превращается, преобразуется в другую, более того, вся плоскость, содержавшая проектируемую фигуру, также подвергается преобразованию — все ее точки проектируются в точки другой плоскости, «плоскости проекций». Теория таких преобразований является научной основой живописи, начертательной геометрии, фотографии, кинематографии, аэрофотосъемки, картографии и т.д.

Когда говорят о *группе преобразований*? Очевидно, тогда, когда речь идет не об одном преобразовании, а о нескольких, о множестве (конечном или даже бесконечном). В математике группа преобразований — это не

любое множество преобразований, а множество, обладающее определенными свойствами.

Главное свойство заключается в том, что двукратное (следовательно, и многократное) повторение преобразований из этого множества может быть заменено одним преобразованием из этого же множества, причем результат окажется тем же самым. В главе третьей мы видели, что обычные проектирования (перспективы) не обладают таким свойством, — следовательно, множество проектирований не является группой. Но проективные преобразования, характеризующиеся сохранением сложного отношения четырех точек, уже обладают этим свойством: результат двух проективных преобразований снова дает проективное преобразование, так как все сложные отношения по-прежнему останутся неизменными.

Нам осталось объяснить последнюю часть термина «непрерывные группы преобразований» — эпитет «непрерывные».

Понятие непрерывности интуитивно сопоставляется с геометрическим образом — непрерывной линией. Линии же мы привыкли связывать с графиками функций: синусоида есть график функции $y = \sin x$, парабола — график функции $y = x^2$, кубическая парабола — график функции $y = x^3$ и т. д. Все эти графики представляют собой непрерывные кривые. Естественно, что и соответствующие функции называются непрерывными.

Перенести это хорошо известное понятие на группы преобразований нетрудно — надо лишь научиться задавать преобразования аналитическими формулами, так же, как мы задаем кривые уравнениями. В следующих главах мы познакомимся с некоторыми примерами непрерывных групп преобразований.

Разработанная Клейном в многолетнем сотрудничестве с норвежским математиком Софусом Ли (1842—1899) теория непрерывных групп преобразований (теперь их часто называют «группами Ли») стала основой классификации в геометрии.

Идея Клейна состоит в том, что признаком, определяющим принадлежность геометрического факта (свойства фигуры, геометрической величины и т.д.) тому или иному разделу геометрии, является его сохранение, инвариантность при любом преобразовании данной непрерывной группы. Значит, каждой непрерывной группе

преобразований соответствует вполне определенная часть геометрии. В дальнейшем каждую такую часть стали называть просто геометрией с эпитетом, указывающим на группу. Например, часть геометрии, соответствующая группе проективных преобразований, есть проективная геометрия.

Итак, классификация «геометрий» сводится к классификации непрерывных групп. Трудность реализации идей Клейна состояла в том, что вопрос о самой классификации непрерывных групп тогда еще не только не был решен, но даже и не был поставлен. Этот вопрос в основном был решен в XX веке знаменитым французским математиком Эли Картаном (1869—1951), получившим за исследования по геометрии и теории групп премию имени Н. И. Лобачевского. Однако Клейн имел основания надеяться, что такая классификация возможна и что она относительно проста.

В чем же состояли основания надежды Клейна? По работам Камиля Жордана (1838—1922) и особенно в результате общения с Софусом Ли Клейн хорошо знал, что понятие группы позволило пролить свет на самые различные и самые трудные проблемы математики. Именно в книге Жордана «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» было изложено гениальное открытие безвременно погибшего Эвариста Галуа (1811—1832), показавшего, что из всех алгебраических уравнений только уравнения не выше четвертой степени всегда могут быть «решены в радикалах», т.е. по формулам, аналогичным известной формуле для квадратного уравнения. Более того, Галуа указал способ, дающий возможность узнать, разрешимо ли в радикалах то или иное конкретное алгебраическое уравнение пятой или более высокой степени. Эта задача, мучившая многие поколения математиков, была решена двадцатилетним юношей Галуа при помощи созданной им теории «групп подстановок» — теории удивительно глубокой, достойной создавшего ее гения.

Изучая вместе с Софусом Ли нелегкую книгу Жордана, Клейн решил, что... Впрочем, предоставим слово самому Клейну, только уже не молодому эрлангенскому профессору, а умудренному долгим педагогическим опытом корифею, который на склоне лет в «Лекциях о развитии математики в XIX столетии» вспоминает:

«Только в 1870 году благодаря появлению книги Жор-

дана... было привлечено всеобщее внимание к теории групп как необходимому орудию теории уравнений... Когда затем Ли и я начали разрабатывать теорию групп в ее приложениях к различным областям математики, то мы сказали: «группа» есть такая совокупность однозначных *операций* A, B, C, ..., что комбинация двух каких-нибудь операций A, B из этой совокупности дает операцию C из этой же совокупности: $A \cdot B = C$.

В своих дальнейших исследованиях Ли оказался вынужденным потребовать, чтобы наряду с операцией A в группу входила и обратная операция A^{-1}.

У современных математиков мы находим более отвлеченное определение, которое является, однако, более точным. Говорят уже не о системе операций, а о системе вещей или элементов A, B, C, ..., причем постулируют, что

1) «произведение» (или комбинация) $A \cdot B = C$ принадлежит к системе (замкнутость системы);

2) имеет место ассоциативный закон $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

3) существует единица E, так что $A \cdot E = A$, $E \cdot A = A$;

4) для каждого элемента A существует обратный элемент, так что уравнение $A \cdot X = E$ разрешимо.

Таким образом, здесь совершенно отказываются от обращения к фантазии. Взамен этого тщательно препарируется логический скелет... Учение о группах... развилось дальше независимо от всяких приложений... в самостоятельную дисциплину. Для многих особая прелесть этой области заключается в том, что в ней можно работать, не зная слишком много об остальной математике... Нужно только следить за тем, чтобы не нарушить указанных четырех законов...»

Но сам-то Клейн и его друг Ли не были в числе этих «многих». Именно они умели применять этот логический скелет. Ли применил его в теории дифференциальных уравнений, т.е. в той области, которая и по сей день является основным средством применения математики к естествознанию (позднее оказалось, что теория групп и как таковая находит широкое применение в некоторых его разделах: теоретической физике, кристаллографии и т.д.), а Клейн — к геометрии (и не только в Эрлангенской программе) и к теории функций коплексного пере-

менного. Видя, что этот «логический скелет» очень хорошо служит многим областям науки, Клейн мог надеяться, что теория групп поможет и в решении задачи классификации геометрических фактов.

Так как в 1872 году теория непрерывных групп только еще начинала свое победное шествие, то Клейн не мог в самой программе сколько-нибудь полно описать предложенную им классификацию геометрий. Он вынужден был ограничиться лишь немногими примерами, имевшимися в его распоряжении, а потом, в течение долгой жизни, следить за тем, как его схема все более и более наполняется фактами.

Основным примером в Эрлангенской программе, естественно, является группа проективных преобразований. Как мы знаем, инвариант этой группы есть сложное отношение четырех точек: именно оно остается неизменным при любом преобразовании, принадлежащем данной группе.

Клейн подробно останавливается и на элементарной (школьной!) геометрии, показывая, что в ее основу можно положить «главную группу», состоящую из «всех движений пространства, преобразований подобия, зеркального отражения и всех преобразований, которые могут быть из них составлены». Он говорит, что «все геометрические свойства характеризуются их неизменностью от преобразований главной группы», и добавляет следующее пояснение: «... действительно, представим себе пространство на мгновение неподвижным, застывшим...; тогда каждая фигура имеет (только) индивидуальный интерес; из свойств же, которыми они обладают как индивидуумы, только те суть собственно геометрические (т.е. относящиеся к геометрии главной группы), которые остаются неизменными при всех преобразованиях главной группы».

Клейн заметил, что существует и универсальный пример: группа всех непрерывных преобразований плоскости или пространства; соответствующая геометрия легла в основу одной из важнейших частей современной математики — топологии.

Но дело не в отдельных примерах. Важно другое. В Эрлангенской программе намечен путь получения из одной проективной геометрии множества других. Этот путь и ведет к абсолюту, этот путь и есть главная

тема нашей книги. На этом пути мы и получим евклидову (метрическую) геометрию «внутри проективной», о чем объявил Клейн в начале своей исторической лекции в Эрлангене. Обо всем этом мы еще расскажем, а сейчас мы хотим отвлечься от теории групп и даже от геометрии вообще и задуматься над проблемами вовсе не математическими.

Как это все-таки объяснить: молодой человек, почти юноша, поднимается на кафедру, читает лекцию — и бессмертие обеспечено? Талант, даже гениальность, плюс трудолюбие? «Везение?» Ведь еще в 1854 году великий немецкий математик Риман (1826—1866) и в 1868 году крупнейший немецкий естествоиспытатель Гельмгольц (1821—1894) выступили с докладами, носившими почти такое же название, что и лекция Клейна («О гипотезах, лежащих в основании геометрии» — Риман; «О фактах, лежащих в основании геометрии» — Гельмгольц), и посвященных той же идее — сформулировать наиболее общие принципы геометрии. Но не их идеи, не их лекции, а именно идеи молодого Клейна так быстро захватили весь математический мир!

В математике, как и во всякой другой науке, важно не только сформулировать идею, открыть закон, но и сделать их доступными для других, важно уметь пропагандировать эти идеи и законы, пропагандировать настойчиво, целеустремленно, всю жизнь, отстаивая их от нападок и искажений.

В 1872 году повсюду (и особенно в Германии!) господствовал тип «традиционного профессора». Клейн был совсем другим. Очаровательный юноша, жадный ко всему новому, необычному, он пытался объяснить красоту Апполона Бельведерского, вычерчивая на лице этого эталона мужской красоты линии кривизны, даже на платье своей невесты он вышил сложные геометрические кривые...

Необычность и своеобразие Клейна проявились и в Эрлангене, и в последующие годы, и даже задолго до начала профессорской деятельности в удивительной общительности, невероятной творческой активности, энтузиазме и убежденности, настойчивости и энергии, делающих его похожим на ученого новой формации, на ученого наших дней, а не «гелерте» полусонной Германии середины XIX века. Именно поэтому он просто не замечал, что Дарбу — гражданин Франции, с которой Германия на-

чинает войну, что Софус Ли — норвежец, с трудом понимающий по-немецки, что его товарищ О. Штольц снисходительно «учит» его геометрии Штаудта, полагая, что самому Феликсу не одолеть этой премудрости.

Эрлангенские профессора, хотя среди них было мало математиков, сумели правильно оценить возможности молодого геометра. Они открыли ему «зеленую улицу», тем самым обеспечив видное место в истории крохотному Эрлангену и его скромному «храму науки». Пример, достойный подражания!

Вот эти качества личности, характера и стиля жизни, наряду с совершенно необходимыми для каждого значительного деятеля талантом и трудолюбием, и сделали Феликса Клейна человеком, которого смело можно назвать предшественником современной математики, ее первым историком, общим учителем всех современных математиков!

Последнюю мысль следует понимать в очень широком смысле. Клейн, наверное, первым, или, по крайней мере, одним из первых почувствовал, что та математика, которую мы сегодня называем современной, станет важнейшей составной частью всех наук и, следовательно, призовет к себе на службу могучую армию математиков самых различных рангов, не только генералов и маршалов науки, но и рядовых и сержантов. А раз так, то изучение современной математики должно начинаться не в вузе и не при «подготовке к профессорскому званию», а еще в школе и не для «избранных», «одаренных», «особо способных», а для всех детей, в том числе и самых обыкновенных.

Но для Клейна «понять и почувствовать» всегда означало «делать, бороться». И хотя Клейн понимал, что «вряд ли есть предмет, в преподавании которого царила бы такая рутина, как в преподавании математики», что необходима коренная перестройка преподавания математики в школе, но именно он, ученый, имеющий уже мировое признание, вдруг (да нет, вовсе не вдруг, к этому его привела логика жизни) серьезно занялся изучением путей этой реформы и в начале века стал признанным руководителем движения за модернизацию школьной математики. Он пишет книги, выступает с многочисленными докладами, активно пропагандирует новое, наконец, в 1905 году под его руководством разрабатывается так называемая Меранская программа (Меране — неболь-

шой городок, где на съезде Германского общества естествоиспытателей и врачей впервые был доложен проект программы по математике для германской общеобразовательной школы). И как Эрлангенская программа стала манифестом новой математики, так Меранская — манифестом ее нового преподавания. Сегодня многое из требований Меранской программы звучит по-новому, многое стало давно пройденным этапом — это естественно. Но и сегодня, радуясь росту математической культуры молодежи, мы не должны забывать, что первым, кто не только предвидел это, но и делал все, что было в его силах, на благо математического образования, был Клейн...

В 1925 году, более чем через полвека после заседания совета в Эрлангене, будущий создатель кибернетики, тогда еще не очень известный американский математик Норберт Винер (1894—1964) «отправился засвидетельствовать свое уважение Феликсу Клейну, который делил с Гильбертом славу самого выдающегося геттингенского математика». Вспоминая об этом визите, Винер писал:

«Клейн уже очень ослабел, и все понимали, что дни его сочтены. Я все-таки с радостью воспользовался представившимся случаем, чтобы познакомиться еще с одним представителем славного прошлого математической науки... Я поднялся наверх и нашел Феликса Клейна в его кабинете — просторной комнате, где было много воздуха и света; вдоль стен стояли книжные шкафы, посередине — большой стол, на котором, разумеется в страшном беспорядке, лежали книги и раскрытые журналы. Великий математик сидел в кресле с пледом на коленях. У него были тонкие изящные черты лица, как будто вырезанные рукой мастера, и борода. Когда я на него смотрел, мне казалось, что я вижу над его головой венец мудреца, а, когда он произносил имя какого-нибудь замечательного математика прошлого, отвлеченное понятие «автор таких-то и таких-то работ» точно по мановению волшебной палочки превращалось в живое человеческое существо. Над самим Клейном время, казалось, больше не было властно — вокруг него все дышало вечностью. Я слушал его с величайшим благоговением и по прошествии нескольких минут заметил, что уже прошу позволения удалиться, как будто я присутствовал на аудиенции при дворе».

Не часто кибернетики с таким благоговением говорят о классиках математики!

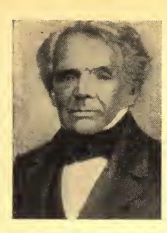
Глава восьмая

ЕЩЕ ОДИН ТРАДИЦИОННЫЙ ПРОФЕССОР. ДИАЛЕКТИКА И КООРДИНАТЫ

Итак, Клейн предложил классификацию различных геометрий с точки зрения теории групп преобразований, и нам предстоит познакомиться с этой классификацией. Но, по Клейну, надо начинать с проективной плоскости. А что это такое? Можно ли ее «потрогать руками», как старую добрую евклидову плоскость? Можно ли представить себе ее наглядно? Можно ли «смоделировать» проективную плоскость? Оказывается, в какой-то степени можно, но для этого потребуется очень богатое воображение.

Впрочем, богатым воображением обладают все настоящие математики, а геометры — тем более. И иногда воображение геометра срабатывает совершенно неожиданно. Так было и с Августом Фердинандом Мёбиусом (1790—1868). В его биографии — астронома по должности, геометра по призванию — нет ничего существенно отличного от биографий уже встречавшихся нам «традиционных профессоров». Но с решением вопроса о строении проективной плоскости связана забавная история, которую неоднократно рассказывал сам Мёбиус, каждый раз присоединяя к ней новые подробности. Нет, профессор не был весельчаком, как его отец — учитель танцев. Напротив, Мёбиус был очень тихим и скромным человеком, но как и многие выдающиеся люди, мог позволить себе относиться с иронией к собственной персоне...

Любопытная особенность выдающихся открытий: чуть ли не о каждом из них рассказывают более или менее правдоподобную историю, начиная от архимедовой «эври-



Август Фердинанд Мёбиус

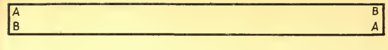
ки» и ньютонова яблока и кончая открытиями сегодняшнего дня. Обыватель знает не о самом открытии, а об этой истории и с черной завистью думает: «Везет же людям: в ванну залез, яблоко на голову упало, еще какое-нибудь обыкновенное чудо произошло — и, пожалуйста, великое открытие налицо...» При этом он забывает, что и до Архимеда люди принимали ванны и до Ньютона сотни яблок падали на головы обывателей, но открытия-то сделали Архимед и Ньютон! Мозг настоящего ученого работает непрерывно; и иногда достаточно маленького толчка, которым может быть какое-то очередное «яблоко». Только этому толчку предшествовал колоссальный труд, он-то и завершился «случайным и легким» открытием.

Итак, весеннее утро 1858 года. Высокоученого профессора Мёбиуса, завершившего утренний моцион, встречает супруга...

— Ну, наконец-то и ты, Август! Я больше не желаю этого терпеть — поднимись в свой кабинет и ты увидишь, на что она способна! Или ты ее уволишь, или... — Герр профессор больше не слушал.

Нет, в свои пятьдесят восемь он вовсе еще не стар и слышит превосходно, просто очень уж отвлекает это ежедневное ворчание. Но все-таки, чем же так недовольна фрау Мёбиус, что могла натворить эта девушка? Книги и рукописи на месте, утренняя почта — тоже. Только что это? С каких пор на его столе валяются дамские подвязки? Тут что-то необычное... Одна подвязка, несомненно, имеет форму цилиндра с направляющей — окружностью. А вот вторая... Что, собственно, считать здесь направляющей?.. Значит, она просто сообразила, что если обыкновенную полосу сшить вот так... Э, девочка не так уж глупа!..

Что же, не замеченное другими, увидел Мёбиус? Попытаемся повторить действия его служанки и в какой-то



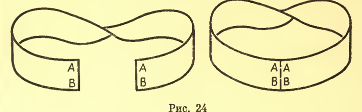


Рис. 24

степени, рассуждения профессора. Подвязка нам не понадобится — сейчас таких не носят, — ее вполне заменит достаточно длинная полоска бумаги. Обратите внимание (рис. 24), как обозначены вершины этой полоски-прямоугольника. Следуя за Мартой, т.е. не очень-то беспокоясь о теории вопроса, склеим «обе» точки A и «обе» точки B. Получился «*лист Мёбиуса*».

Главным его отличием от обыкновенных поверхностей является отсутствие «изнанки»: у листа Мёбиуса нет второй стороны, он имеет только одну «лицевую» сторону. Как это понимать? Попробуйте выкрасить поверхность листа Мёбиуса. Окажется, что вы, не переходя через края листа, выкрасите его весь одним цветом! Это и значит, что лист Мёбиуса является односторонней поверхностью — в отличие от обычного цилиндра, для полного закрашивания которого придется перейти через край, т.е. на другую (внутреннюю, например, если вы начали с внешней) сторону, и который можно раскрасить двумя красками так, что граница будет проходить только «по краю».

Этой поразительной особенностью не исчерпываются свойства листа Мёбиуса. Попробуйте отрезать узенькую полоску от его края. Окажется, что у листа Мёбиуса не только одна сторона, но и только один край! Вот тут-то и начинается то, что так понравилось Мёбиусу и что позволило ему «увидеть» модель проективной плоскости, — край листа Мёбиуса ведет себя как проективная прямая! Мёбиус много лет искал такую модель, и Марта «помогла» найти ее. Правда, при аккуратном рассмотрении оказывается, что лист Мёбиуса является моделью не всей

проективной плоскости. Чтобы получить полную модель, надо не только неограниченно продолжить нашу полоску, но еще и замкнуть ее в другом направлении (поперек), приклеить, так сказать, «донышко» к «бывшему цилиндру». Для решения этой задачи надо перейти в четырехмерное пространство. Но что это такое? С точки зрения житейской представить себе пространство с числом измерений больше трех невозможно. Наука же давным-давно оперирует многомерными пространствами, но только с помощью координат. Замените привычные x, y, z на x_1, x_2, x_3, добавьте к ним x_4, а если хотите, то и x_5, $x_6, \ldots, \ldots, x_n$ — и дело сделано.

Координаты? Но мы же вслед за Дезаргом, Понселе-Штейнером объявили себя противниками иероглифов анализа! Впрочем, внимательный читатель должен был почувствовать потребность в координатах еще и в рассуждениях о непрерывности групп...

Но тогда можно упрекнуть авторов в странной непоследовательности и нарушении логики изложения. Или это какая-то высшая логика? Вероятно, все происходит не по злой воле авторов, а по каким-то законам, управляющим развитием науки. Поговорим об этих законах.

Огромное количество фактов, их объединение в виде теорий и целых наук — все это накапливалось в течение тысячелетий. Человечество должно было как-то разобраться в потоке знаний, установить какие-то наиболее общие закономерности. Знание этих закономерностей не может, конечно, заменить знания самих конкретных фактов, но может значительно облегчить ориентацию в мире фактов и открытие важнейших законов.

Установление общих закономерностей — задача неимоверно трудная. Для ее решения нужно иметь не только колоссальную эрудицию, но и обладать по меньшей мере гениальными способностями.

Оказалось, что эти закономерности отражают в познании законы, присущие всей окружающей нас действительности — природе и обществу. Следовательно, они носят характер всеобщих законов, а поэтому их можно сформулировать только в философии — науке, еще более общей, чем математика.

Крупнейшие философы всех времен в той или иной степени подходили к открытию этих закономерностей, а ученые-естествоиспытатели, сами того не сознавая, пос-

тоянно применяли их. Но одним (например, древнегреческому философу Гераклиту) не хватало знаний, накопленных к тому времени человечеством, другим (например, немецкому философу Гегелю) мешало неправильное, идеалистическое мировоззрение, т.е., попросту говоря, убежденность в том, что все — от бога, от какого-то «высшего существа», «абсолютной идеи» и т.п. Впрочем, этот тормоз мешал не только Гегелю. В условиях общества, в котором образование является преимущественным достоянием эксплуататорских классов, большинство ученых принадлежит этим классам или всецело зависит от них, а потому вольно или невольно разделяет выгодное эксплуататорам мировоззрение...

Вот почему открыть и точно сформулировать общие законы познания смог только гениальный ученый — последовательный революционер.

А последовательный революционер мог быть порожден только таким классом, который заинтересован в уничтожении всякой эксплуатации. Первым таким классом является, как известно, пролетариат, а его первыми вождями были великие ученые и великие революционеры — Карл Маркс и Фридрих Энгельс. Им принадлежит честь установления и четкой формулировки наиболее общих законов, в соответствии с которыми происходит развитие природы и общества и познание их человеком.

Наука, изучающая эти законы, называется диалектикой (у древних греков слово диалектика означало искусство рассуждать, вести беседу).

Человеку, который еще не занимался диалектикой и вообще философией (а знакомиться с ними надо как можно раньше!), нельзя рекомендовать ничего лучшего, чем начать с чтения книги Ф.Энгельса «Анти-Дюринг».

Жалкая фигура Дюринга давно была бы забыта, если бы он не подал Энгельсу повод написать полемические заметки о «перевороте в науке, произведенном господином Евгением Дюрингом», которые и известны теперь под кратким названием «Анти-Дюринг».

Полемическая форма изложения обычна для философов. Каждому из них приходилось опровергать или предшественников, или современников, чтобы доказывать справедливость своего ви́дения мира. Конечно, полемическое изложение труднее для восприятия. Но сила гения, страстность революционера, литературное мастерство особенно

сильно проявляются именно в полемике. И, может быть, поэтому полемические работы в науке столь же популярны и долговечны, как остросюжетные произведения в художественной литературе, в театре и в кино...

Итак, откроем «Анти-Дюринг», но начнем читать не с начала, а с той части, которая непосредственно содержит изложение интересующих нас законов диалектики, — это главы XII—XIII первого отдела.

Первая из этих глав посвящена вскрытию источника, движущей силы всякого развития. Энгельс видит его в противоречии, бесконечное число раз возникающем, разрешающемся и вновь возникающем.

Энгельс иллюстрирует свою мысль на многочисленных примерах, в том числе и на примерах, взятых из математики: «... одной из главных основ высшей математики является противоречие, заключающееся в том, что при известных условиях прямое и кривое должны представлять собой одно и то же. Но в высшей математике находит свое осуществление и другое противоречие, состоящее в том, что линии, пересекающиеся на наших глазах, тем не менее уже в пяти-шести сантиметрах от точки своего пересечения должны считаться параллельными, т.е. такими линиями, которые не могут пересечься даже при бесконечном их продолжении. И тем не менее высшая математика этими и еще гораздо более резкими противоречиями достигает не только правильных, но и совершенно недостижимых для низшей математики результатов»[1].

Мы видели в предыдущих главах, что второе противоречие и породило учение о перспективе, а за ним и всю проективную геометрию. Понятия несобственных элементов и проективной плоскости дали возможность «разрешить» это противоречие и тем самым существенно продвинуть науку. Таким образом, Энгельс отметил внутреннюю причину движения и в интересующей нас области.

В первой половине XIX века в геометрии возникло новое противоречие: наглядный, бесформульный характер построенной теории вступил в противоречие с необходимостью вернуться к координатам и формулам...

И вот это «возвращение» является проявлением еще одного очень важного закона диалектики, которому пос-

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Полн. собр. соч. 2-е изд., т. 20, с. 124.

вящена тринадцатая глава «Анти-Дюринга», носящая несколько таинственное название «Отрицание отрицания». Энгельс пишет:

«Но что же такое все-таки это ужасное отрицание отрицания, столь отравляющее жизнь г-ну Дюрингу и играющее у него такую же роль непростительного преступления, какую у христиан играет прегрешение против святого духа? — В сущности, это очень простая, повсюду и ежедневно совершающаяся процедура, которую может понять любой ребенок, если только очистить ее от того мистического хлама, в который ее закутывала старая идеалистическая философия и в который хотели бы и дальше закутывать ее в своих интересах беспомощные метафизики вроде г-на Дюринга. Возьмем, например, ячменное зерно. Биллионы таких зерен размалываются, развариваются, идут на приготовление пива, а затем употребляются. Но если такое ячменное зерно найдет нормальные для себя условия, если оно попадет на благоприятную почву, то, под влиянием теплоты и влажности с ним произойдет своеобразное изменение: оно прорастет; зерно, как таковое, перестает существовать, подвергается отрицанию; на его место появляется выросшее из него растение — отрицание зерна. Каков же нормальный жизненный путь этого растения? Оно растет, цветет, оплодотворяется и, наконец, производит вновь ячменные зерна, а как только последние созреют, стебель отмирает, подвергается, в свою очередь, отрицанию. Как результат этого отрицания отрицания мы здесь имеем снова первоначальное ячменное зерно, но не просто одно зерно, а в десять, двадцать, тридцать раз большее количество зерен»[1].

Продемонстрировав действие закона на более сложных примерах из биологии и зоологии, Энгельс обращается к математике, а также приводит одну из самых поэтических и страстных страниц «Капитала», относящуюся к развитию частной собственности при капитализме: сначала крупный капиталист отбирает (отрицает) собственность мелких производителей, а затем социалистическая революция приводит к экспроприации (отрицание отрицания!) капиталистической частной собственности на средства производства (фабрики, заводы и т.д.). «... Бьет час

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Полн. собр. соч. 2-е изд., т. 20, с. 139.

капиталистической частной собственности. Экспроприаторов экспроприируют.»[1]

Заканчивая наше философское отступление, мы надеемся, что читателю теперь легче примириться с неизбежностью возвращения координат в геометрию, ибо это возвращение есть еще одно проявление общего закона диалектики. Очевидно, что речь пойдет не о простом возвращении, а о возвращении на совершенно новом уровне, позволяющем не только по-новому записать известные нам факты, но и получить новые результаты.

Читателю, конечно, известно, что координаты суть числа, определяющие положение точки на плоскости (на поверхности, вообще в каком-либо множестве) относительно какой-либо системы координат. Иными словами, система координат дает возможность отобразить[2] точки плоскости (поверхности, множества) во множество пар (или троек, или «наборов» по n штук, где n — любое натуральное число) чисел — координат. Простейшими и общеизвестными примерами являются декартовы координаты на плоскости и в пространстве, а также географические координаты на сфере.

А теперь посмотрим, как вводятся координаты в проективной геометрии. Замечательно, что и это первым сделал Мёбиус в фундаментальном произведении «Барицентрическое исчисление» (1827 г.). Это сочинение коренным образом отличалось от геометрических работ его очных и заочных учителей. Как это часто бывает с талантливыми математическими сочинениями, оно обогнало время и довольно долго оставалось не понятым и не оцененным. Правда, не так долго, как это было с трудами Дезарга, — шел уже XIX век, а не XVII...

Подобно Дезаргу, применявшему терминологию ботаники, Мёбиус воспользовался терминологией другой науки — механики. Он назвал введенные им координаты «барицентрическими». «Барос»— в переводе с греческого — вес, тяжесть. Следовательно, «барицентр» — центр тяжести.

Начнем с введения барицентрических координат на отрезке AB, который отождествим с невесомым стержнем.

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Полн. собр. соч. 2-е изд., т. 20.
[2] Теперь часто и само это отображение тоже называют системой координат.

Пусть на концах этого стержня находятся два тела массы m_1 и m_2 (рис. 25). Требуется найти центр тяжести этой системы. Хорошо известно, что расстояния центра тяжести M от концов A и B стержня должны быть обратно пропорциональны массам m_1 и m_2, т.е.

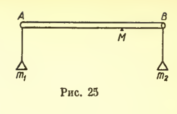


Рис. 25

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Ясно, что положение точки M не изменится, если мы умножим обе массы на одно и то же число $p \neq 0$, так как

$$\frac{pm_2}{pm_1} = \frac{m_2}{m_1}.$$

По той же причине не играет роли единица измерения масс. Значит, положение барицентра (будем для краткости и из уважения к Мёбиусу употреблять этот термин вместо слов «центр тяжести») определится отношением двух чисел $m_2 : m_1$.

Такое же простое и естественное решение имеет и обратная задача: найти отношение масс, при котором наперед указанная точка M стержня стала бы барицентром. Отношение $|AM| : |MB|$ находится непосредственным измерением отрезков AM и MB, а грузы подбираются так, чтобы их отношение было равно числу $\lambda = |AM| : |MB|$. Произвол подбора грузов таков, что на два искомых числа m_1 и m_2 накладывается лишь одно условие: $m_2 : m_1 = \lambda$.

Таким образом, на отрезке AB мы установили некоторую систему координат: пары чисел $(m_2 : m_1)$ соответствуют множеству всех точек отрезка AB, кроме его концов. Как включить в рассмотрение точки A и B? Пусть масса m_2 неограниченно уменьшается, а масса m_1 остается неизменной. Тогда число $\lambda = m_2 : m_1$ будет стремиться к нулю, а барицентр будет стремиться к точке A. Естественно приписать этой точке координаты, отношение которых равнялось бы нулю, например $(0 : 1)$. Совершенно аналогично точка B получит координаты $(1 : 0)$, что означает безграничное уменьшение массы m_1

(а не деление на нуль!). Итак, теперь в качестве чисел m_2 и m_1 могут выступать все действительные неотрицательные числа.

Введенное отображение не является взаимно-однозначным: одной и той же точке M отвечает бесчисленное множество пар чисел $(m_2 : m_1)$, $(2m_2 : 2m_1)$, ...$(pm_2 : pm_1)$, т.е. все пропорциональные пары. Это обстоятельство весьма существенно. Со времен Ферма и Декарта установилось мнение, что только взаимно-однозначные соответствия являются хорошими, полезными в качестве координатных систем и вообще в математике. Однако наше «плохое» соответствие легко исправить. Разобьем множество всех пар положительных чисел на подмножества — «классы», включив в каждый класс все пропорциональные друг другу пары. Один класс будет содержать пары (1:2), (3:6), (1,5:3) и т.д., т.е. все пары $(p : 2p)$, где p — любое положительное число. Другой класс будет содержать пары (4:3), (8:6), (12:9), (6:4,5) и вообще все пары $(4p : 3p)$. Еще один класс будет состоять из пар (1:0), (2:0), (3:0) и вообще из всех пар $(p : 0)$. А еще один — из всех пар $(0 : p)$.

Это разбиение таково, что каждая пара входит в один и только в один класс. Сами классы в этом случае принято называть *классами эквивалентности*, а множество классов (не пар, а именно классов!) называется *фактор-множеством* по отношению к исходному множеству (в нашем случае — к множеству пар чисел). Переход к фактор-множеству дает возможность превратить не взаимно-однозначное соответствие точек и пар чисел во взаимно-однозначное соответствие точек и классов, т.е. элементов фактор-множества.

Если наш читатель всерьез займется математикой и ее приложениями, то он еще не раз встретится с этой замечательной процедурой «факторизации».

Итак, для отрезка AB (см. рис. 25) введены барицентрические координаты: точке M соответствует класс всех пар чисел x_1 и x_2, удовлетворяющих условию $x_1 : x_2 = |AM| : |MB|$. То, что вместо букв m_2 и m_1 написаны более привычные x_1 и x_2, несущественно, еще менее существенна смена нумерации.

Но в декартовой системе координаты получались для всей прямой и на ней «помещались» все действительные числа. А у нас пока не использованы отрицательные чис-

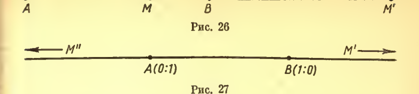


Рис. 26

Рис. 27

ла и остались все точки вне отрезка AB. Распространить нашу систему на эти множества можно при помощи введенных Шалем направленных отрезков. Координата точки M', лежащей вне отрезка AB, определяется при помощи направленных отрезков AM' и $M'B$. Например, на рисунке 26 точка M' имеет координатой класс пар чисел $x_1 : x_2 = 2 : (-1)$. Теперь очевидно, что любой точке M прямой, на которой зафиксированы точки A и B, будет соответствовать класс пар действительных чисел, определенный с точностью до общего множителя по правилу $x_1 : x_2 = AM : MB$. Для внутренних точек отрезка AB это отношение положительно, а для внешних — отрицательно.

В дальнейшем для удобства мы будем все-таки говорить не об одной координате— классе пар чисел $x_1 : x_2$, а об *однородных координатах* $x_1 : x_2$, памятуя, что они определены с точностью до общего множителя, т. е. пары $tx_1 : tx_2$ при любом t определяют одну и ту же точку. Смысл прилагательного «однородные» (которое мы часто будем опускать) вскоре выяснится.

Посмотрим, как изменяются однородные координаты точки M' при движении ее вправо от точки B (1:0). Отрезки AM' и $M'B$ увеличиваются, но их отношение уменьшается (по модулю!) и приближается сколь угодно близко к минус единице.

Что же будет происходить при движении влево от точки A (0:1) (рис. 27)? Отрезки AM'' и $M''B$ увеличиваются (по модулю!), а их отношение приближается сколь угодно близко к минус единице.

«Минус единица» маячит и справа:

$$\lim_{M'\to\infty} \frac{AM'}{M'B} = \lim_{M'\to\infty} \frac{AB + BM'}{M'B} = \lim_{M'\to\infty} \frac{AB}{M'B} + \lim_{M'\to\infty} \frac{BM'}{M'B} = 0 + (-1) = -1,$$

$A(0:1)$ $E(1:1)$ $B(1:0)$ $M(x_1:x_2)$

Рис. 28

и слева:

$$\lim_{M''\to\infty} \frac{M''B}{AM''} = \lim_{M''\to\infty} \frac{M''A + AB}{AM''} = \lim_{M''\to\infty} \frac{M''A}{AM''} + \\ + \lim_{M''\to\infty} \frac{AB}{AM''} = -1 + 0 = -1.$$

С арифметической точки зрения получилась довольно любопытная вещь: шли направо — впереди «маячила» недостижимая минус единица, пошли влево — впереди снова та же самая минус единица, как будто шли мы не по прямой, а по какой-то странной линии, весьма напоминающей проективную прямую своей замкнутостью (ведь не может же быть двух различных «минус единиц», т.е. мы подходили и справа и слева к одному и тому же объекту!). Итак, во множестве отношений отрезков $AM{:}MB$ нет отношения, равного минус единице, а на прямой, содержащей отрезок AB, нет несобственной точки. Добавим к прямой несобственную точку (как это делал еще Дезарг) и будем считать, что ее координаты суть $x_1 : x_2 = -1{:}1 = 1{:}-1$. Не получилась ли уже система координат для проективной прямой?

Нет! Ибо полученные однородные координаты суть отношения отрезков $AM : MB$, а они, как нам хорошо известно, не сохраняются при центральном проектировании. Надо перейти к сложному отношению, т.е. к отношению двух отношений. Как? Очень просто. Надо задать на прямой не две точки, а три. Обозначим их A, B, E (рис. 28). Эти точки могут быть расположены на прямой как угодно, среди них может быть и несобственная (для проективной прямой она вполне равноправна с остальными), лишь бы никакие две из них не совпадали. Отношение $AE : EB$ фиксировано. Возьмем теперь на этой же прямой произвольную точку M, составим отношение $AM : MB$ и назовем *проективными однородными координатами* $x_1 : x_2$ точки M отношение отношений: $x_1 : x_2 = (AM : MB) : (AE : EB)$, т.е. сложное отношение

$$x_1 : x_2 = (AB\ ;\ ME).$$

A E $M_1(14:5)$ B $M_2(-26:1)$

Рис. 29

Заметим, что если M совпадает с A, то $(AB;ME) = 0$; поэтому координаты точки A суть $x_1 : x_2 = 0 : 1$. Если же M совпадает с B, то $AM : MB = 1 : 0$, поэтому можно считать, что и $(AB;\ ME) = 1 : 0$, а координаты точки B суть $x_1 : x_2 = 1 : 0$. Если, наконец, M совпадает с E, то $(AB;ME) = 1$ и координаты точки E суть $x_1 : x_2 = 1 : 1$.

Все это, в общем-то, очень просто, но несколько непривычно и может показаться непонятным. Поэтому полезно внимательно рассмотреть конкретные примеры.

Задача 1. На прямой даны точки M_1 и M_2. Найти их проективные координаты $(x_1 : x_2)$ для M_1, $(y_1 : y_2)$ для M_2 (рис. 29).

Решение. $AE : EB = 4 : 8 = 1 : 2$; $AM_1 : M_1B = 7 : 5$; $AM_2 : M_2B = 13 : (-1)$.

$x_1 : x_2 = (AB;M_1E) = (AM_1 : M_1B) : (AE : EB) = (7 : 5) : (1 : 2) = 14 : 5$;

$y_1 : y_2 = (AB;M_2E) = (AM_2 : M_2B) : (AE : EB) = (13 : (-1)) : (1 : 2) = -26 : 1$.

Задача 2. Известны проективные однородные координаты точек $M_1(-2 : 3)$ и $M_2(2 : 3)$. Построить эти точки (рис. 30).

Решение. Так как точки A, B и E даны (они порождают систему координат), то, выполнив измерения, получим: $AE : EB = -(4 : 2) = -2$. Для точки M_1 имеем $x_1 : x_2 = -2 : 3 = (AB;\ M_1E) = (AM_1 : M_1B) : (AE : EB) =$

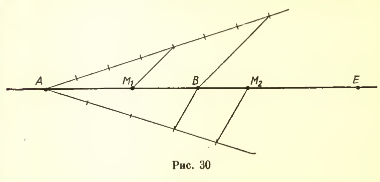


Рис. 30

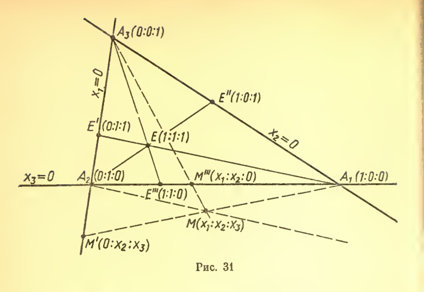


Рис. 31

$= (AM_1 : M_1B) : (-2)$, отсюда $AM_1 : M_1B = 4 : 3$ и остается разделить отрезок AB в отношении $4 : 3$. Аналогично, для точки M_2 имеем $y_1 : y_2 = 2 : 3 = (AB; M_2E) = (AM_2 : M_2B) : (-2)$; $AM_2 : M_2B = (-4) : 3$ и остается разделить отрезок AB в отношении $(-4) : 3$.

Теперь все понятно? Проверьте себя, ответив на следующие вопросы: когда отношение $x_1 : x_2$ отрицательно? Когда оно положительно? Образуют ли точки A, B, M_1 и M_2 на рисунке 29 гармоническую четверку? А на рисунке 30?

Теперь надо перейти от прямой к плоскости. Прежде всего возьмем произвольный треугольник $A_1A_2A_3$ и присвоим его вершинам и сторонам однородные координаты и уравнения, указанные на рисунке 31. Разумеется, координаты вершин удовлетворяют уравнениям проходящих через них сторон. Затем добавим точку E, не принадлежащую ни одной из сторон треугольника, и присвоим ей однородные координаты $1 : 1 : 1$. Проекции этой точки из вершин на противоположные стороны треугольника дадут точки E' и E'' и E'''. На каждой стороне треугольника возникает проективная система координат. Например, на стороне A_2A_1 точка A_2 играет роль точки A рисунка 28, точка A_1 — роль точки B того же рисунка,

а точка E''' — роль точки E. В самом деле, для точки E''' так же, как и для всех точек этой прямой, имеем: $x_3 = 0$. Уравнение прямой A_3E''' имеет вид $x_2 - x_1 = 0$, так как только ему одновременно удовлетворяют координаты точек A_3 и E'''. Поэтому для всех точек прямой A_3E''' имеем: $x_2 = x_1$; в силу однородности координат можем считать, что для точки E''' годятся координаты $1 : 1 : 0$. Отвлекаясь от несущественной третьей координаты, получим то же, что и на рисунке 28.

Возьмем произвольную точку M, спроектируем ее из точки A_3 на прямую A_2A_1, получим точку M''' и сложное отношение $x_1 : x_2 = (A_2M''' : M'''A_1) : (A_2E''' : E'''A_1)$. Затем спроектируем точку M из точки A_1 на прямую A_2A_3, получим точку M', которая вместе с точками A_3, A_2 и E' дает сложное отношение $x_2 : x_3 = (A_3M' : M'A_2) : (A_3E' : E'A_2)$. Осталось принять отношение $x_1 : x_2 : x_3$ за проективные координаты точки M. Итак, проективные координаты точки на плоскости выражаются через проективные координаты ее проекций на прямые. Вот почему мы так подробно рассматривали координаты точки на прямой.

Итак, если дана точка, то можно определить ее координаты в виде отношения $x_1 : x_2 : x_3$. А если дано такое отношение, то определяет ли оно точку? Конечно. Имея его, можно построить точки M' и M''' и провести прямые A_3M''' и A_1M', их пересечение и даст искомую точку M (пересечение обязательно будет — параллельных нет!). Следует ожидать (и легко проверить — ожидание не будет обмануто), что проектирование на третью сторону треугольника даст

$$x_1 : x_3 = (A_3A_1; M''E''),$$

где E'' и M'' — проекции точек E и M из точки A_2 на прямую A_1A_3.

Таким образом, фигура, состоящая из четырех точек A_1, A_2, A_3, E, порождает проективную систему координат на плоскости, а координатами являются всевозможные тройки чисел $x_1 : x_2 : x_3$, определенные с точностью до общего множителя, кроме тройки $0 : 0 : 0$ (два нуля еще допустимы: они дают вершины координатного треугольника, но по трем нулям никакой точки не построишь!). С этим единственным исключением придется примириться. Так как координаты выражены через сложные отно-

шения, то они инвариантны относительно проективных преобразований. Задача создания координат, пригодных для проективной геометрии, решена полностью.

Проективная система координат создана позднее и в известной степени в противовес декартовой. Однако они тесно связаны. Вспомним, что проективную прямую можно получить, дополнив евклидову несобственным элементом. Пусть таким элементом послужит точка B, отправленная в «бесконечность». Координаты точки M вычисляем по формуле (1):

$$x_1 : x_2 = (AB; ME) = \frac{AM}{MB} : \frac{AE}{EB} = \frac{AM}{AE} \cdot \frac{EB}{MB}.$$

Заметим, что отношение

$$\frac{EB}{MB} = \frac{EM + MB}{MB} = \frac{EM}{MB} + 1$$

при удалении точки B в бесконечность устремится к единице. Поэтому $x_1 : x_2 = AM : AE$. Приняв отрезок AE за единицу масштаба и обозначив $x_1 : x_2$ одним числом x, мы вернемся к обычному правилу определения декартовой координаты: $x = AM$ ед. длины. Значит, проективная система координат на прямой есть обобщение декартовой системы. Иначе говоря, декартова система есть частный случай проективной. Легко убедиться, что так же обстоит дело и на плоскости (только удалять в бесконечность придется не точку B, а одну из координатных прямых, например прямую A_1A_2).

Значит, Мёбиус «всего только» обобщил идеи Декарта на новый объект — проективное пространство. Надо сказать, что большинство смелых и сильных шагов в математике и есть «всего только» обобщения.

Глава девятая

АНАЛИТИКА ТОРЖЕСТВУЕТ?

Теперь мы покажем, как используются проективные координаты. Прежде всего получим формулу, позволяющую вычислять сложное отношение четырех точек по их проективным координатам. Это должно быть нетрудно: ведь проективные координаты сами суть сложные отношения! Но... чернил потребуется немало.

Пусть на прямой даны четыре точки X, Y, Z, T, имеющие координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$, $(y_1 : y_2 : y_3)$, $(z_1 : z_2 : z_3)$, $(t_1 : t_2 : t_3)$. Как вычислить сложное отношение $(XY; ZT)$? Спроектируем все четыре точки из какой-нибудь вершины координатного треугольника, например из A_3 на прямую A_2A_1 (рис. 32). Получились четыре точки: X', Y', Z', T'. Вычислим их координаты на прямой A_2A_1. Сначала сделаем это подробно для точки X' (вспомните, как мы делали в предыдущей главе):

$$x_1 : x_2 = (A_2A_1;\ X'E') =$$

$$= \frac{A_2X'}{X'A_1} : \frac{A_2E'}{E'A_1} = \frac{A_2X'}{X'A_1} \cdot q.$$

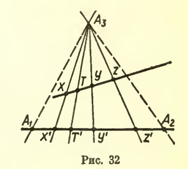


Рис. 32

Здесь буквой q обозначено не зависящее от наших четырех точек число $E'A_1 : A_2E'$ (ведь точки A_2 и A_1 — вершины координатного треугольника, а точка E' —

проекция единичной точки E из вершины A_3 на сторону A_2A_1). Совершенно аналогично получим:

$$y_1 : y_2 = \frac{A_2Y'}{Y'A_1} \cdot q;$$

$$z_1 : z_2 = \frac{A_2Z'}{Z'A_1} \cdot q;$$

$$t_1 : t_2 = \frac{A_2T'}{T'A_1} \cdot q.$$

Координаты проекций всех четырех точек получены, теперь легко составить сложное отношение этих проекций. Так как оно — инвариант центрального проектирования, то сразу же получится и сложное отношение четырех исходных точек. Итак, имеем:

$$(XY; ZT) = (X'Y'; Z'T') = \frac{X'Z'}{Z'Y'} : \frac{X'T'}{T'Y'} = \frac{X'Z' \cdot Y'T'}{Y'Z' \cdot X'T'}. \quad (1)$$

Если бы мы знали отрезки $X'Z'$, $Y'T'$, $Y'Z'$ и $X'T'$, то задача была бы решена. Найдем их, начав, например, с отрезка $X'Z'$. Для этого вычислим сначала разность отношений проективных координат его концов:

$$\frac{z_1}{z_2} - \frac{x_1}{x_2} = q \cdot \left(\frac{A_2Z'}{Z'A_1} - \frac{A_2X'}{X'A_1}\right). \quad (2)$$

Теперь применим правило Шаля для направленных отрезков: $AB = -BA$, $AB + BC = AC$ и маленькую хитрость, которая часто встречается в математических выкладках: $a + 1 - 1 = a$. С разностью (2) произойдет следующее:

$$\frac{z_1}{z_2} - \frac{x_1}{x_2} = q\left(\frac{A_2Z'}{Z'A_1} + 1 - 1 - \frac{A_2X'}{X'A_1}\right) =$$

$$= q\left(\frac{A_2Z' + Z'A_1}{Z'A_1} - \frac{X'A_1 + A_2X'}{X'A_1}\right) =$$

$$= q \cdot A_2A_1\left(\frac{1}{Z'A_1} - \frac{1}{X'A_1}\right) = q \cdot A_2A_1 \cdot \frac{X'A_1 + A_1Z'}{Z'A_1 \cdot X'A_1}.$$

Итак,

$$\frac{z_1}{z_2} - \frac{x_1}{x_2} = q \cdot A_2A_1 \cdot \frac{X'Z'}{Z'A_1 \cdot X'A_1}.$$

Отсюда, обозначив $A_2A_1 \cdot q = q^*$, найдем:

$$X'Z' = \frac{X'A_1 \cdot Z'A_1}{q^*}\left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Совершенно аналогичные вычисления дают равенства:

$$Y'Z' = \frac{Y'A_1 \cdot Z'A_1}{q^*}\left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{y_1}{y_2}\right);$$

$$X'T' = \frac{X'A_1 \cdot T'A_1}{q^*}\left(\frac{t_1}{t_2} - \frac{x_1}{x_2}\right);$$

$$Y'T' = \frac{Y'A_1 \cdot T'A_1}{q^*}\left(\frac{t_1}{t_2} - \frac{y_1}{y_2}\right).$$

Теперь все готово. Достаточно внести найденные значения отрезков в формулу (1). Получается

$$(XY; ZT) = \frac{(z_1x_2 - x_1z_2) \cdot (t_1y_2 - y_1t_2)}{(z_1y_2 - y_1z_2) \cdot (t_1x_2 - x_1t_2)}. \quad (3)$$

Очевидно, изменив выбор проекции, мы получим аналогичную формулу, но с другими номерами координат, например:

$$(XY; ZT) = \frac{(z_1x_3 - x_1z_3) \cdot (t_1y_3 - y_1t_3)}{(z_1y_3 - y_1z_3) \cdot (t_1x_3 - x_1t_3)}. \quad (3')$$

Мы так подробно повели эту выкладку по двум причинам. Во-первых, полученные формулы сыграют в дальнейшем важную роль. Во-вторых, нам хотелось показать как работает аналитика в геометрии: чернил действительно потребовалось больше, а соображать — меньше (в пределах правил тождественных преобразований да «маленьких хитростей»).

И все-таки скептически настроенный читатель может загрустить: очень длинным путем мы пришли к довольно громоздкой формуле. А ведь это — только наш первый аналитический шаг. Что же будет дальше? А дальше будет легче. Недаром говорят: «Лиха беда — начало!» К построению и изучению математических теорий эта поговорка применима почти всюду. Применима она и в нашем случае.

Первое облегчение в дальнейшие выкладки вносит однородность проективных координат, т.е. то, что они определяются в виде отношений $x_1 : x_2$ или $x_1 : x_2 : x_3$.

Благодаря этому уравнения линий и поверхностей (по крайней мере, алгебраических) становятся однородными и поэтому гораздо более удобными для исследования. В чем состоит это удобство? Сейчас мы покажем это на простейших примерах.

Уравнение прямой обычно записывается в виде $y = ax + b$, где x и y —декартовы координаты. Можно перенести все члены уравнения в одну сторону: $ax-y+b=0$. Это уравнение неоднородно — два члена содержат первые степени переменных x и y, а один (свободный член) — нулевую. Как сделать уравнение однородным? Надо, чтобы свободный член b превратился в одночлен первой степени, т.е. надо умножить b на некоторую переменную. А откуда ее взять? Вспомним, как только что, переходя от однородных проективных координат к декартовым, мы заменили отношение $x_1 : x_2$ одним числом x. Проделаем обратную процедуру! Положим,

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Тогда наше линейное уравнение примет вид

$$a\frac{x_1}{x_3} - \frac{x_2}{x_3} + b = 0,$$

или

$$ax_1 - x_2 + bx_3 = 0.$$

Уравнение стало однородным!

«Ну и что?» — скажет скептик. А для начала очень немного — можно упростить запись. Умножим обе части уравнения на некоторое число $\lambda \neq 0$ и обозначим: $a\lambda = a_1$, $-\lambda = a_2$, $b\lambda = a_3$. Уравнение принимает вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Великий физик Альберт Эйнштейн подсказал математикам удобный способ краткой записи сумм: если один и тот же индекс повторяется два раза, то это означает суммирование. Иначе говоря, запись $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ можно заменить более краткой: a_ix_i.

По Эйнштейну наше уравнение можно записать так: $a_ix_i = 0$ (суммировать от 1 до 3).

«Ну и что? — снова скажет скептик. — Велик ли выигрыш?»

Посмотрим! В старых учебниках аналитической геометрии уравнение второй степени (оно соответствует кривой второго порядка) записывается в виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Если ввести однородные координаты и применить правило Эйнштейна, то это уравнение примет вид

$$\alpha_{ij}x_ix_j = 0. \tag{4}$$

Изящно? Да! Скептик должен сдаться.

Однако внимательный читатель должен заметить, что в уравнении (4) имеется девять слагаемых, а в «старом» уравнении — шесть. Дело в том, что в уравнении (4) есть подобные члены, например $\alpha_{12}\, x_1x_2$ и $\alpha_{21}\, x_2x_1$. Принято приводить их: $\alpha_{12}x_1x_2 + \alpha_{21}x_2x_1 = (\alpha_{12} + \alpha_{21})x_1x_2$ — и обозначать новый коэффициент $2\beta_{12}$. Это равносильно новой записи уравнения (4) в виде

$$\beta_{ij}x_ix_j = 0, \tag{5}$$

где считается $\beta_{ij} = \beta_{ji}$.

Таким образом, только лишь использование однородных координат и остроумного способа записи суммы дало значительный эффект — самое общее уравнение кривой второго порядка записано предельно кратко. Но и это еще не все!

Известно, что целесообразный выбор декартовой (т.е. менее общей, менее подвижной, чем проективная) системы позволяет записывать уравнения кривых второго порядка в очень простом виде. Например, если поместить начало координат в центр окружности, то ее уравнение принимает простейший вид: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, где r — радиус.

Поэтому естественно ожидать, что уравнение любой кривой второго порядка при помощи целесообразного выбора проективной системы координат тоже может быть значительно упрощено. Делается это так. Заметим, что центр окружности, т.е. начало координат, является полюсом несобственной прямой, которая вместе с осями декартовой системы составляет координатный треугольник $A_1A_2A_3$. Легко догадаться, что на проективной плоскости можно сделать все его вершины полюсами противоположных сторон (рис. 33). Такой треугольник называется *автополярным*. Прямые a_1, a_2, a_3 — поляры

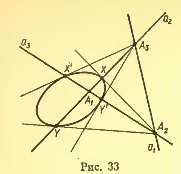


Рис. 33

точек A_1, A_2, A_3. Относительно пар (a_3, A_3), (a_2, A_2) это следует из определения (см. рис 33). Тогда точка A_1 является полюсом прямой a_1, так как A_1 есть пересечение прямых a_2 и a_3, а четверки точек (XYA_1A_3) и $(X'Y'A_1A_2)$ — гармонические. Кроме того, для упрощения можно воспользоваться и произволом выбора единичной точки E. В результате (подробности мы опускаем) уравнение (5) кривой второго порядка приводится к одному из следующих пяти видов:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \qquad \text{(I)}$$

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0; \qquad \text{(II)}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0; \qquad \text{(III)}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0; \qquad \text{(IV)}$$

$$x_1^2 = 0. \qquad \text{(V)}$$

Исследуем их. Первое уравнение не имеет действительных решений, так как сумма трех неотрицательных чисел (квадратов) может равняться нулю только тогда, когда все они — нули, а три нуля не дают никакой точки на проективной плоскости (см. гл. 8). Третье уравнение по той же причине имеет решением единственную точку $(1 : 0 : 0)$.

Последние два уравнения «распадаются» на линейные:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0,$$

$$x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_1 = 0,$$

т.е. им соответствуют на плоскости прямые линии: две в первом случае ($x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$) и одна ($x_1 = 0$) во втором.

Значит, все «настоящие» кривые второго порядка описываются одним и тем же уравнением (II): $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$

(нумерация координат произвольна — все проективные координаты равноправны). Мы получили аналитическое (и очень простое по форме!) подтверждение замеченному еще древними факту: все «настоящие» кривые второго порядка с проективной точки зрения одинаковы (см. рис. 1).

Что ж, так оно и есть, так оно и должно быть. Аналитический метод вновь начинает торжествовать: действует всеобщий закон отрицания отрицания. Синтетическая, наглядная геометрия опять «экспроприирована», подавлена аналитикой — алгеброй однородных уравнений, тем более что на первых шагах разработка этой алгебры — дело довольно простое. Конечно, как только идея Мёбиуса получила признание, сразу нашлись люди, вновь провозгласившие конец синтетической геометрии. Даже Феликс Клейн не удержался на диалектической позиции и заявил: «... дальнейшее развитие, подобно тому как оно во многом поставило на надлежащее место персональные заслуги, сумело разрешить спор и по существу, обеспечив во всех направлениях перевес аналитической геометрии».

Здесь две принципиальные ошибки. Во-первых, нельзя сопоставлять «персональные дела» и развитие науки. К счастью, они разворачиваются, как правило, не «подобно».

Во-вторых, и это — главное, закон отрицания отрицания всеобщ и во времени. И неизбежно наступит (и уже наступает) момент, когда аналитический метод исчерпает свои временные преимущества, а могучая интуиция «синтетиков» вновь заблещет и обеспечит резкое движение науки вперед, преодолевая тупики, в которые зашли «аналитики».

Произойдет (и уже происходит) «экспроприация» аналитического метода. «Перевес аналитической геометрии», о котором в начале 20-х годов нашего века писал Ф. Клейн, в наши дни уже не является несомненным. Так в многократно возникающем и вновь разрешающемся противоречии двух мощных методов и происходит развитие геометрии.

Глава десятая

ЧТО ТАКОЕ АБСОЛЮТ

Проективная геометрия — не только первая, отличная от евклидовой, геометрическая система. Согласно программе Клейна, она может служить базой для построения большого числа новых геометрий. А именно: каждой непрерывной группе преобразований отвечает определенная геометрия. Клейн предлагает рассматривать прежде всего такие группы преобразований, которые являются подгруппами группы проективных преобразований. Сама же подгруппа выделяется заданием такой геометрической фигуры, которая не изменяется ни при одном из преобразований данной подгруппы (т.е. является ее инвариантом) и называется *абсолютом*. Проективные координаты дают возможность достаточно просто и естественно показать, как осуществляется программа Клейна.

Прежде всего нам надо выяснить, как будут выглядеть в проективных координатах формулы проективных преобразований. Пусть дана некоторая точка M с координатами $x_1 : x_2 : x_3$. В результате некоторого проективного преобразования она перешла в точку M^* с координатами $x_1^* : x_2^* : x_3^*$. Как найти формулы

$$x_i^* = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

по которым эти координаты вычисляются?

Мы знаем (гл.1), что при проективных преобразованиях прямая переходит в прямую. Значит, формулы (1) должны быть такими, чтобы уравнение любой прямой при любом проективном преобразовании превращалось

бы снова в уравнение прямой. Иначе говоря, линейное однородное уравнение $a_i x_i = 0$ должно перейти в линейное однородное уравнение $a_i^* x_i^* = 0$. Это возможно только в том случае, когда функции f_i тоже будут линейными и однородными, т.е. формулы (1) примут вид

$$x_i^* = a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (2)$$

(мы все время имеем в виду правило Эйнштейна). Более подробное исследование показывает, что коэффициенты a_{ij} могут быть произвольными числами, удовлетворяющими только одному существенному ограничению: соотношения (2) должны быть разрешимы относительно x_j (что обеспечивает существование в группе преобразования, обратного к преобразованию (2)).

В развернутой записи формулы (2) имеют вид

$$\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3; \\ x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \\ x_3^* &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \qquad (2')$$

Решение системы (2′) относительно переменных x_1, x_2 и x_3 (мы опускаем элементарные, но довольно громоздкие выкладки) возможно только в том случае, если выражение $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$ не равно нулю. Это выражение обычно записывают в виде таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а его значение называют *определителем* (детерминантом) и кратко обозначают $\det \| a_{ij} \|$. Выполнение условия

$$\det \| a_{ij} \| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3 \qquad (3)$$

и обеспечивает разрешимость системы (2′) относительно x_j.

Воспользовавшись формулой (3) предыдущей главы, легко проверить, что сложное отношение четырех точек является инвариантом преобразования (2) при любых значениях a_{ij}. Отсюда и следует, что формулы (2) представляют собой самое общее проективное преобразование проективной плоскости.

Посмотрим, как по этим формулам можно убедиться

в том, что проективные преобразования образуют группу, причем непрерывную. Напомним постулаты группы (гл. 7): множество преобразований есть группа, если 1) последовательное выполнение двух преобразований дает снова преобразование, принадлежащее этому множеству (основное свойство), 2) имеет место ассоциативность, 3) для каждого преобразования существует обратное, 4) тождественное преобразование входит в рассматриваемое множество.

Выполнение основного группового свойства проверяется легко. Если второе проективное преобразование записать в виде $x_k^{**} = b_{ki}x_i^*$, $k = 1, 2, 3$ (это значит, что точка M^* переходит в точку M^{**}, имеющую координаты x_k^{**}), то композиция двух преобразований, т. е. преобразование точки M в точку M^{**}, примет вид

$$x_k^{**} = b_{ki}x_i^* = b_{ki}a_{ij}x_j.$$

Сумму $b_{ki}a_{ij}$ можно обозначить c_{kj}. Формулы композиции двух преобразований примут вид $x_k^{**} = c_{kj}x_j$. Линейность и однородность очевидны. Непосредственной выкладкой можно проверить, что

$$\det \| c_{kj} \| \neq 0. \tag{4}$$

Если заметить, что тождественное преобразование можно записать в виде $x_i^* = x_i$ (это частный случай линейных однородных формул, здесь $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$ и $\det \| a_{ij} \| = 1$), что третье свойство обеспечено условием (4) и, наконец, что ассоциативность для линейных формул всегда имеет место, то все групповые свойства проверены.

Итак, формулы (2) позволяют вычислять координаты точек M^* по координатам точки M при любых значениях девяти чисел a_{ij}, кроме тех, которые нарушают условие (3). Задание преобразования числами, т. е. установление отображения множества преобразований во множество наборов действительных чисел (в данном случае девяток чисел a_{ij}), означает, как мы уже говорили, введение координат на этом множестве. Тем самым представление о непрерывности группы проективных преобразований сводится к интуитивно ясному понятию непрерывности множества действительных чисел.

Теперь можно, наконец, перейти к выделению непрерывных подгрупп проективной группы при помощи

абсолютов. Однако перед этим уместно сказать несколько слов о самом термине «абсолют».

Обычно слово «абсолют» ассоциируется с идеалистической философией Гегеля, в которой соответствующее понятие играет весьма важную роль. С незапамятных времен люди, пытаясь объяснить себе окружающий их таинственный мир, прибегали к помощи «потусторонних сил». Сначала это были многочисленные боги (или черти). Потом, когда те или иные вещи удавалось объяснить без применения потусторонней («божественной» или «нечистой») силы, количество богов и чертей стало сокращаться, и — на разных ступенях развития у разных народов — сводиться к одному богу (и одному дьяволу — человек всегда мыслил диалектически, каждому понятию он всегда подбирал противоположное, отрицающее). Наиболее глубокомысленные философы поняли, что если даже бога нет, то его надо выдумать, чтобы объяснить некоторые явления не только природы, но и общественного развития. Так возникла философия Гегеля, содержащая не только научный метод мышления — диалектику, но и антинаучную, реакционную идею «абсолютного духа», т. е. некоего высшего существа, этапами развития которого является вся история природы, человеческого общества и познания.

Само слово «абсолют» происходит от латинского absolutus, что значит «безусловный». У Гегеля «абсолютная идея», «абсолютный дух» означают нечто независящее от природы и общества, существовавшее до них, временно воплотившееся в них и намеревающееся каким-то таинственным образом снова от них отвлечься, абстрагироваться, абсолютизироваться.

Гегелевская философия неплохо служила и служит реакции, оправдывая абсолютную, вечную власть сначала королей и императоров, а затем и его величества капитала. Но она была и одним из источников марксизма — самой революционной теории, не нуждающейся ни в каком «оправдании». Ибо стоило очистить «абсолютную идею» от всяческих наслоений, как стало очевидно, что идея эта вообще не нужна, что все происходящее в природе и обществе может быть объяснено познанием самой природы, самого общества, законов их развития. И чем дальше продвигалось познание, тем меньше оставалось места для богов.

Итак, по Гегелю абсолют — это нечто такое, что находится вне бытия, но чем можно воспользоваться для «объяснения» бытия... Наш, геометрический, «абсолют» выделяется в проективной геометрии, геометрии довольно абстрактной, но зато очень простой, чтобы объяснить другие, более важные для практики, но и более сложные системы. Каждую из этих систем можно построить и без абсолюта, но при помощи абсолютов это можно сделать проще, на единой основе. Термин «абсолют», введенный в геометрию еще в 1859 году Артуром Кэли (1821—1895), был подхвачен Клейном и получил всеобщее распространение. Это был тот — увы, не частый в истории науки — случай, когда новое понятие было снабжено с самого начала именем, лингвистически хорошо отражающим его сущность.

Вспомним теперь то место Эрлангенской программы, где предлагается «ограничить преобразования, полагаемые в основу исследования, теми преобразованиями данной группы, которые не изменяют данного образа и которые непременно сами по себе представляют группу». Под «данным образом» Клейн понимает ту или иную вполне определенную геометрическую фигуру. Эта фигура обладает «абсолютными» свойствами: она является единственной частью плоскости, остающейся абсолютно неизменной при всех преобразованиях, входящих в подгруппу. В новой геометрии она является недоступной, «потусторонней», так как ее элементы (точки, прямые) не принадлежат этой геометрии, не рассматриваются в ней.

С аксиоматической точки зрения новая геометрия получается из исходной посредством присоединения к списку ее аксиом дополнительных аксиом, соответствующих абсолюту. При всей его естественности такой процесс построения новой геометрии оказывается довольно сложным, так как сложен вообще и сам аксиоматический метод. Зато аналитический подход сравнительно прост: формулы, описывающие преобразования исходной группы, надо изменить так, чтобы они обеспечивали инвариантность абсолюта.

Вот и все. Теперь мы можем перейти к систематическому рассмотрению абсолютов и порождаемых ими геометрий.

Глава одиннадцатая

ОПЯТЬ БЕЗ ИЗМЕРЕНИЙ

В поисках абсолюта мы обратимся прежде всего к точкам и прямым. В дальнейшем выяснится, что в качестве абсолюта можно брать и более сложные фигуры. Это даже необходимо, если мы хотим до конца выполнить первый пункт программы Клейна — получить евклидову геометрию, в которой понятие расстояния играет основную роль, на базе проективной, в которой расстояний вообще нет.

В этой же главе мы получим лишь такие геометрии, в которых еще нет расстояния, нет возможности производить измерения. Но и эти геометрии очень важны и интересны. Итак, мы начинаем!

ШАГ ПЕРВЫЙ. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пусть прямая a — абсолют. На проективной плоскости все прямые пересекаются со всеми. Следовательно, все они пересекаются и с прямой a. Иначе говоря, на каждой прямой есть точка, принадлежащая одновременно и ей и абсолюту. Значит, задавая на какой-либо прямой три точки A, B и C, мы фактически получаем четыре: четвертая (Q) есть точка пересечения прямой (AB) с абсолютом (рис. 34).

Сложное отношение четырех точек $(AB;\ CQ) = \frac{AC}{CB} : \frac{AQ}{QB}$ является инвариантом любого проективного преобразования, в том числе и того, которое оставляет в покое абсо-

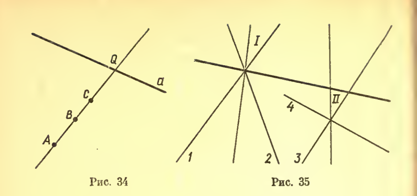


Рис. 34

Рис. 35

лют. Но так как четвертую точку задавать не нужно (она находится единственным образом на абсолюте), то получается, что в той геометрии, где абсолютом выбрана прямая, кроме сложного отношения, имеется еще один инвариант — отношение трех точек.

Дальше обнаруживается еще один любопытный факт. Рассмотрим множество всевозможных пар прямых. Пока абсолют не выделен, все они равноправны, все они пересекаются, каждая пара — в какой-то одной точке. Но, как только абсолют выделен, картина изменилась: точки пересечения некоторых пар прямых лежат на абсолюте, точки пересечения некоторых других пар — не лежат (рис. 35). Возникает возможность классификации пучков прямых: пучки с вершинами на абсолюте составят один класс, остальные — другой. Значит, новая геометрия, геометрия с прямой-абсолютом богаче проективной: в ней больше инвариантов и больше различных фигур.

Еще больше убеждает нас в этом рассмотрение кривых второго порядка. С проективной точки зрения (т.е. на проективной плоскости, в проективной геометрии) есть только одна «настоящая» (т.е. состоящая из бесчисленного множества точек и не распадающаяся на прямые) кривая второго порядка (см. конец гл. 9). Кстати, так как все такие кривые получаются при пересечении конуса плоскостью, то вместо длинного словосочетания «кривая второго порядка» часто употребляют краткий термин *коника*. Мы теперь будем им пользоваться.

При наличии прямой-абсолюта «настоящие» коники делятся, очевидно, на три класса (рис. 36): 1) коники,

пересекающие абсолют, 2) коники, не пересекающие абсолют, 3) коники, касающиеся абсолюта.

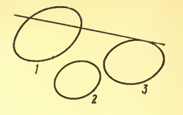
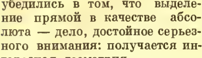


Рис. 36



И здесь обогащение, и здесь больше различных фигур! Мы убедились в том, что выделение прямой в качестве абсолюта — дело, достойное серьезного внимания: получается интересная геометрия.

Проективные преобразования, оставляющие неизменной некоторую прямую, называются *аффинными*, группа, которую они образуют, называется *аффинной подгруппой* группы проективных преобразований, а определяемая этой группой геометрия — *аффинной геометрией*. Наконец, плоскость, состоящая из всех точек проективной плоскости, кроме точек, принадлежащих абсолюту, называется *аффинной плоскостью*[1].

Чтобы сравнить аффинную плоскость с евклидовой, мы обратимся к методу координат. Вернемся к рисунку 33. На нем изображена проективная система координат, т.е. фигура F, состоящая из трех прямых (не имеющих общей для всех них точки) и единичной точки E, не лежащей на них. Пока мы изучали проективную плоскость, как таковую, в качестве проективной системы координат могла выступать любая такая фигура, так как все они были равноправны. При переходе от изучения проективной геометрии к изучению аффинной естественно включить абсолют в систему координат, т.е. считать, например, прямую A_1A_2 (ее уравнение — $x_3 = 0$) несобственной прямой, абсолютом.

Рассмотрим теперь расширенную евклидову плоскость, т.е. евклидову плоскость, дополненную несобственными элементами (ее фактически ввел еще Дезарг, см. гл. 1). Выясним, каким будет для нее уравнение несобственной прямой относительно декартовой системы координат.

[1] Термин «аффинный» по отношению к преобразованиям введен Л. Эйлером. Фигуры, получающиеся друг из друга такими преобразованиями, имеют по Эйлеру некоторое родство, причем родство специального вида. Латинское слово affinitas означает родство по жене (по-русски —«свойство»: Иван и Петр — свояки, если они женаты на родных сестрах).

В декартовой системе уравнение прямой имеет вид

$$ax + by + c = 0$$

или, после подстановки $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$ (т.е. при переходе к однородным координатам, как мы это уже делали в гл. 8), $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$. При этом, если $B = C = 0$, то на A можно сократить, и $x_1 = 0$ есть уравнение оси ординат. Если же $A = C = 0$, то сократить можно на B, и $x_2 = 0$ есть уравнение оси абсцисс. Если же $A = B = 0$, то сократить можно на C, и уравнение $x_3 = 0$ есть ... Стоп! Несколькими строчками выше мы делали замену $x = \frac{x_1}{x_3}$, переменная x_3 была в знаменателе, и, значит, не могла обращаться в нуль: деление на нуль невозможно! Значит, на обычной евклидовой плоскости прямой $x_3 = 0$ нет. А на расширенной — есть! Это несобственная прямая.

Итак, уравнение несобственной прямой на расширенной евклидовой плоскости имеет точно такой же вид, что и уравнение абсолюта, порождающего аффинную геометрию. Значит, если при «дополнении» евклидовой плоскости, с которого начинали проективную геометрию Дезарг и Понселе, дополнительные элементы не «уравнивать в правах» с точками и прямыми евклидовой плоскости, а объявить их абсолютом, то получится аффинная геометрия!

Все стало очень просто: прямые, пересекающиеся не на абсолюте, — это самые обыкновенные пересекающиеся прямые, а те, что пересекаются на абсолюте, — это самые обыкновенные параллельные прямые, ибо по Дезаргу и Понеселе им «приписывалась» дополнительная, «несобственная» точка пересечения, т.е. точка абсолюта. Итак, параллельность прямых является простейшим геометрическим инвариантом аффинной геометрии. Нетрудно также заметить, что отмеченным выше трем аффинным типам коник на расширенной евклидовой плоскости соответствуют (рис. 37) хорошо известные кривые, а именно: 1) гипербола, пересекающая абсолют — бесконечно удаленную прямую — в двух точках — несобственных точках прямых m и n (эти прямые называются асимптотами); 2) эллипс, не пересекающий абсолют; 3) парабола,

касающаяся абсолюта в общей с осью симметрии несобственной точке.

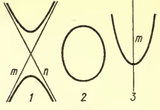


Рис. 37

Однако окружность на аффинной плоскости не может быть выделена, так как свойство, выделяющее ее среди эллипсов, связано с понятием расстояния (вспомните определение окружности!), а это свойство не аффинное: две точки не имеют инварианта в аффинной геометрии.

Теперь попытаемся найти формулы преобразований аффинной группы. Мы помним (гл. 10), что формулами

$$x_i^* = a_{ij}x_j, \qquad \det \| a_{ij} \| \neq 0 \tag{1}$$

описываются все преобразования проективной группы. Следовательно, какие-то из них будут описывать аффинные. Какие? Те, которые сохраняют абсолют, т.е. те, которые точки прямой $x_3 = 0$ превращают в точки прямой $x_3^* = 0$. Но при $i = 3$ формулы (1) дают

$$x_3^* = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \,. \tag{2}$$

Чтобы из $x_3 = 0$ следовало $x_3^* = 0$, необходимо потребовать $a_{31} = a_{32} = 0$. Формулы для x_1^* и x_2^* в (1) остаются такими же, что и для любых проективных преобразований. В итоге мы получаем формулы преобразований аффинной группы:

$$\begin{aligned} x_1^* &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3; \\ x_2^* &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \\ x_3^* &= a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Условие $\det \| a_{ij} \| \neq 0$ принимает вид

$$a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0. \tag{4}$$

Собственно, все уже сказано. Но в аффинной плоскости имеет смысл вернуться к неоднородным координатам, т.е. применить формулы $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$ и для координат x_i и для координат x_i^*. Удобно записать их

так: $x_1 = xx_3$, $x_2 = yx_3$; $x_1^* = x^*x_3^*$, $x_2^* = y^*x_3^*$. Тогда из формулы (3) следует:

$$x^*x_3^* = a_{11}xx_3 + a_{12}yx_3 + a_{13}x_3,$$

$$y^*x_2^* = a_{21}xx_3 + a_{22}yx_3 + a_{13}x_3.$$

Подставляя сюда $x_3^* = a_{33}x_3$ и деля затем все почленно на $a_{33}x_3$ (разумеется, при условии $x_3 \neq 0$, т.е. только для всех точек, не принадлежащих абсолюту, — значит, для всех точек аффинной плоскости), получаем:

$$x^* = b_{11}x + b_{12}y + b_{13}; \qquad y^* = b_{21}x + b_{22}y + b_{23}, \tag{5}$$

где $b_{pq} = \frac{a_{pq}}{a_{33}}$ при любых p, q, причем индексы p и q принимают значения 1 и 2. Эти коэффициенты связаны единственным ограничением:

$$b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0, \tag{6}$$

вытекающим из условия (4).

Мы получили, что совокупности аффинных преобразований соответствует совокупность всех линейных неоднородных формул (5) при условии (6). Это и есть аналитическое определение группы аффинных преобразований в неоднородных координатах. Аффинными преобразованиями, в частности, являются хорошо известные гомотетия, сжатие, растяжение, преобразование симметрии и др.

ШАГ ВТОРОЙ. ЦЕНТРОПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Трудно придумать что-либо более простое (в известном смысле и более сложное), чем прямая и точка. Но именно эта простота и позволила нам, выбрав прямую в качестве абсолюта, получить столь важную по значению и по приложениям аффинную геометрию. Не окажется ли такой же хорошей геометрия, где абсолютом является точка?

Программа действий ясна. Объявим абсолютом точку, т.е. выделим из группы проективных преобразований такую подгруппу, которая оставляет выделенную точку неподвижной, потом отыщем инвариантные фигуры и

величины и, наконец, найдем формулы преобразований. Но математик — в некотором смысле лентяй. Он всегда пытается найти такой путь, где работы поменьше, где можно использовать уже достигнутое, опереться на известное. Нельзя ли схитрить и здесь?

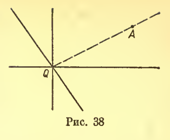


Рис. 38

Была проективная плоскость с прямой — абсолютом. Хотим сделать абсолютом точку... Хотим заменить прямую точкой... Но ведь еще Понселе... Да! Надо опереться на принцип двойственности! Надо взять аффинную геометрию и выполнить замену прямых точками, точек прямыми.

Итак, пусть точка A — абсолют, им мы заменили прямую a. Во что перейдут точки аффинной плоскости, не принадлежащие «старому» абсолюту? Очевидно, в прямые, не проходящие через новый абсолют, через точку A. Во что превратятся точки свергнутого абсолюта (точки несобственной прямой)? Они станут прямыми, инцидентными новому абсолюту, т.е. проходящими через точку A. Все бывшие несобственные точки перейдут в пучок несобственных прямых с центром в абсолюте. Поэтому абсолют и называют *центром* пространства, а порождаемую им геометрию — *центропроективной*.

В аффинной геометрии инвариантная величина получалась при задании трех точек, лежащих на одной прямой (конечно, не на абсолюте). Переделаем эту фразу по принципу двойственности: в центропроективной геометрии инвариантная величина получается при задании трех прямых, проходящих через одну точку (конечно, не через абсолют). В аффинной геометрии мы пришли к этому выводу, рассматривая три точки на прямой и четвертую — на абсолюте. Теперь мы должны говорить о сложном отношении, которое образуют три прямые с прямой, проходящей через их общую точку Q и абсолют (рис. 38).

Итак, инвариантная величина есть. А фигура? В аффинной геометрии — параллельные прямые. Заменим слово «прямые» словом «точки». Но как быть с параллельностью? Нельзя же говорить о «параллельных» точках! Воспользуемся часто применяемым приемом: сначала

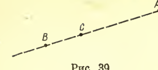


Рис. 39

введем определение, а из него «извлечем» термин. Параллельные прямые, по определению, — прямые, не имеющие общих собственных точек (пересекающиеся в несобственной точке). В центропроективной геометрии нам придется говорить о точках, которые по определению «не имеют общих собственных прямых». Это значит, что их нельзя соединить собственной прямой. Отсюда естественно возникает термин — *несоединимые точки*, которым мы и будем пользоваться. Например, на рисунке 39 точка A — абсолют, точки B и C — несоединимые, т.е. лежащие на прямой, проходящей через абсолют, и остающиеся такими при любых преобразованиях центропроективной подгруппы.

А как обстоят дела с кривыми второго порядка (конечно, «настоящими», т.е. не распадающимися на пару прямых и имеющими действительные точки)? Коникам, имевшим в аффинной геометрии две несобственные точки, будут соответствовать коники, имевшие две несобственные касательные. Эти коники двойственны гиперболам. Кониками, не имевшим в аффинной геометрии точек пересечения с абсолютом, будут соответствовать коники, не имеющие несобственных касательных. Это — коники, двойственные эллипсам. Коникам, имевшим в аффинной геометрии одну несобственную точку, будут соответствовать коники, имеющие одну несобственную касательную. Получаем фигуры, двойственные параболам (рис. 40).

Чтобы получить формулы преобразования, надо выбрать систему координат так, чтобы абсолют совпал с одной из вершин координатного треугольника — точкой A_3 $(0:0:1)$. Приняв ее за вершину, получим, что несобственные прямые (они проходят через точку A_3) задаются теперь уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

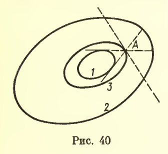


Рис. 40

Остается получить из общих формул проективных преобразований формулы всех тех преобразований, которые обеспечивают неподвижность абсо-

люта. Для этого необходимо, чтобы из $x_1 = x_2 = 0$ следовало: $x_1^* = x_2^* = 0$. Положим, в формулах (1) $a_{13} = a_{23} = 0$, и уравнения преобразований центропроективной группы станут такими:

$$x_1^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2;$$
$$x_2^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2; \quad (7)$$
$$x_3^* = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

ШАГ ТРЕТИЙ. ЦЕНТРОАФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Итак, и прямая, и точка, выбранные в качестве абсолютов, породили интересные и во многих отношениях полезные геометрии. Они «богаче» проективной геометрии, т.е. обладают более простыми инвариантами (трех точек или трех прямых) и имеют специфические пары прямых (параллельные) или точек (несоединимые). В то же время каждая из этих геометрия сохранила и все богатство проективной геометрии — теоремы Дезарга и Паскаля, например, а также замечательные конструкции Штаудта.

Что же дальше? Здравый смысл подсказывает несколько путей поисков. Можно попытаться рассмотреть абсолют, образованный не одной прямой (точкой), а двумя и более. Можно обратиться к фигурам более сложным, чем прямые и точки, видимо, прежде всего к кривым второго порядка. А можно построить геометрию, в которой абсолютом будет объединение нескольких фигур. Естественно, что в этом случае начать надо с самой простой пары, приняв за абсолют не инцидентные точку и прямую одновременно. Мы с этого и начнем, хотя бы потому, что здесь окажется много знакомого. Действительно, можно сказать, что мы возьмем абсолют аффинной геометрии и дополним его центром-точкой, а можно сказать, что мы возьмем абсолют центропроективной геометрии и дополним его несобственной прямой. Такой абсолют «изображен» на рисунке 41. Он состоит из точки A и прямой a. Здесь m, n, p,... — несобственные прямые; M, N, P,... — несобственные точки; q и q' — параллельные прямые; Q и Q' — несоединимые точки.

Естественно возникают и объединяющие названия:

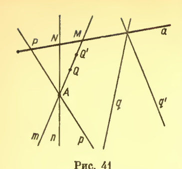


Рис. 41

центроаффинная геометрия, группа *центроаффинных преобразований* и т.п.

Формулы преобразований центроаффинной группы имеют вид

$$x_1{}^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2;$$
$$x_2{}^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2; \qquad (8)$$
$$x_3{}^* = a_{33}x_3.$$

Разумеется, можно перейти и к неоднородным координатам:

$$\begin{aligned} \overset{*}{x_3} &= b_{11}x + b_{12}y; \\ y^* &= b_{21}x + b_{22}y, \end{aligned} \qquad (9)$$

где, конечно, $\det \| b_{pq} \| \neq 0$ (здесь $p = 1,2$; $q = 1,2$).

ШАГ ЧЕТВЕРТЫЙ. ФЛАГОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Проницательный читатель мог заметить, что в центроаффинной геометрии, взяв в качестве абсолюта пару точка — прямая, мы исключили случай, когда точка — центр пространства — лежит на несобственной прямой. А ведь аккуратное изучение вопроса требует внимательного рассмотрения всех возможных случаев.

Итак, пусть абсолют состоит из прямой a и лежащей на ней точки A. Оказывается, здесь немало любопытного. Мы отметим лишь, что новая геометрия будет двойственна самой себе, ибо по принципу двойственности из нового абсолюта образуется снова он же.

Легко получить уравнения преобразований новой подгруппы:

$$\begin{aligned} x_1{}^* &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3; \\ x_2{}^* &= \qquad\quad\; a_{21}x_2 + a_{23}x_3; \\ x_3{}^* &= \qquad\qquad\qquad\quad\; a_{33}x_3. \end{aligned} \qquad (10)$$

Ей соответствует какая-то новая геометрия, имеющая право и на новое имя. Имя это возникло, как часто

бывает в математике, из соображений, весьма от нее далеких. Дело в том, что в трехмерном пространстве абсолют будет состоять из плоскости α, прямой a, лежащей в этой плоскости, и точки A, лежащей на этой прямой (рис. 42). Эта конструкция (при наличии поэтического воображения, столь свойственного математикам) может напомнить флаг. Поэтому новую геометрию и назвали *флаговой*.

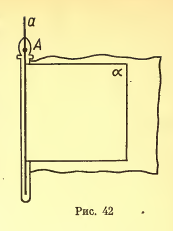


Рис. 42

* * *

А теперь несколько слов о приложениях наших странных геометрий. Прежде всего заметим, что понятие «приложения математики» не следует трактовать слишком прямолинейно, отыскивая непосредственные и немедленные применения каждой теоремы, каждой формулы и каждого раздела той или иной теории. Однако следует обращать особое внимание на те разделы, которые уже получили применение.

Аффинная геометрия, например, является теоретической базой начертательной геометрии. Между любыми частями комплексного чертежа (т.е. чертежа, части которого представляют собой различные параллельные проекции одного и того же тела) имеет место аффинное соответствие, т.е. они могут быть получены друг из друга аффинными преобразованиями.

Можно указать еще немало применений полученных в этой главе геометрий. Но для дальнейшего важно подчеркнуть одну существенную теоретическую особенность: в этих геометриях нельзя получить инвариант двух точек или двух прямых, поэтому невозможно ввести понятия расстояния и величины угла, т.е. в них нельзя измерять. В них нет «метрики». Они — *неметрические*.

Глава двенадцатая

ЧТО ТАКОЕ РАССТОЯНИЕ

Главное отличие только что рассмотренных геометрий от евклидовой состоит в том, что они неметрические, т. е. в них нет расстояния от одной точки до другой и величины угла между двумя прямыми. Очевидно, чтобы выполнить обещание Клейна — получить евклидову геометрию из проективной, — надо ввести в проективную геометрию какие-то «похожие» на расстояние и величину угла понятия. Наверное, достаточно будет отыскать что-нибудь одно, дальше поможет принцип двойственности.

Начнем с расстояний. Это понятие вводится в самом начале школьного курса геометрии. Более абстрактно (для любого множества) оно определяется так. Пусть X, Y, Z,... — точки. *Расстоянием* называется неотрицательная функция $d(X, Y)$, определенная для любой пары точек и удовлетворяющая трем аксиомам:

1) аксиоме тождества: $d(X,X) = 0$,

2) аксиоме симметрии: $d(X,Y) = d(Y,X)$,

3) аксиоме треугольника: $d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z)$.

Чтобы получить метрическую (может быть, евклидову, а может быть, и какую-то другую) геометрию из проективной, надо ввести проективно-инвариантные функции пар точек, удовлетворяющие этим аксиомам.

Начнем с пары точек на проективной прямой. Но мы хорошо знаем, что простейший проективный инвариант — сложное отношение — возникает при наличии не двух и не трех, а только четырех точек. Значит, для получения инварианта пары точек на прямой надо взять в качестве абсолюта... пару точек! Тогда для любых двух точек X и

Y можно образовать сложное отношение $(AB;\ XY)$, где A и B — точки абсолюта. Точки A и B во всех случаях будут одни и те же (абсолют!), а точки X и Y — любые, кроме A и B (абсолют недоступен!). Надо проверить, выполняются ли для таких сложных отношений аксиомы расстояния. Для проверки первой аксиомы надо вычислить сложное отношение $(AB;\ XY)$ для случая совпадения X и Y, т.е. вычислить значение частного $\frac{XA}{XB} : \frac{AX}{XB}$. Очевидно, оно равно единице, а нам надо нуль... С симметрией дело обстоит еще хуже: при перестановке точек X и Y сложное отношение изменяется, так как

$$(AB; XY) = \frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB} = \frac{AX \cdot YB}{XB \cdot AY},$$

а

$$(AB; YX) = \frac{AY}{YB} : \frac{AX}{XB} = \frac{AY \cdot XB}{YB \cdot AX}.$$

Поэтому

$$(AB;\ \ XY) = 1 : (AB; YX),$$

т.е. никакой симметрии нет и в помине! Так обстоит дело с «простенькими» аксиомами, а уж об аксиоме треугольника вообще нечего говорить! Где же решение вопроса?

Оно — рядом, только для его получения надо обладать некоторой смелостью. Еще в 1858 году друг Клейна Артур Кэли пришел к интересующим нас результатам. Сама по себе его идея очень проста. Надо рассматривать не само сложное отношение, а какую-то его функцию, обладающую свойствами расстояния.

В евклидовой геометрии для трех точек X, Y и Z одной и той же прямой аксиома треугольника сводится к теореме Шаля для направленных отрезков: $XY + YZ = XZ$. К этому-то случаю Кэли и стал «подгонять» искомую функцию сложного отношения. Он заметил, что из

$$f(X, Y) = \frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB}, \quad f(X, Z) = \frac{AX}{XB} : \frac{AZ}{ZB},$$

$$f(Y, Z) = \frac{AY}{YB} : \frac{AZ}{ZB}$$

сразу следует: $f(X,Y) \cdot f(Y,\ Z) = f(X,\ Z)$. Это почти то, что нужно, — только вместо сложения фигурирует ум-

ножение. Как от умножения перейти к сложению? Любой школьник ответит: «Надо прологарифмировать!» Так и сделаем:

$$\log f(X,Y) + \log f(Y,Z) = \log f(X,Z).$$

Остается обозначить[1] $\log f = d$ — и готово:

$$d(X,Y) + d(Y,Z) = d(X,Z).$$

Заметим, что Кэли вместо логарифмов вводил арккосинусы. Клейн же предпочел логарифмы, и Кэли считал это существенным улучшением. Впрочем, и арккосинусы нам еще пригодятся!

Итак, с аксиомой треугольника покончено. Да, но настоящего-то треугольника еще не было — точки X, Y и Z лежат на одной и той же прямой! А его и не будет. Оказалось, что требование выполнения аксиомы треугольника для любых трех точек плоскости является слишком сильным и нарушается во многих весьма интересных геометриях. Но третья аксиома для любой прямой, принадлежащей любой неевклидовой плоскости, является весьма существенной: без нее ни о каком измерении расстояний и речи быть не может.

Перейдем к остальным аксиомам. Начнем с симметрии. Было так: $(AB;\ XY) = 1 : (AB; YX)$. Прологарифмируем это равенство: $\log\ (AB;\ XY) = -\log\ (AB; YX)$, т.е.

$$d\ (X,Y) = -d\ (Y,X).$$

Это хорошо! Это по Шалю! Расстояние со знаком удобно во многих случаях. А если понадобится выполнять требование неотрицательности расстояния, т.е. точно выполнять вторую аксиому, то достаточно положить $d\ (X,Y) = |\log (AB;\ XY)|$ — и готов возврат от Шаля к Евклиду.

Выполняется и первая аксиома, так как равенство $\log (AB;\ XY) = 0$ равносильно требованию $(AB;\ XY) = 1$, а это возможно тогда и только тогда, когда $X = Y$.

Неужели все разрешилось так просто? Прологарифмировали — и все в порядке? Нет, не все! В определении расстояния говорится, что число $d\ (X,Y)$ сопоставляется всякой паре точек. Однако если пары A, B и X, Y разделяют друг друга (как пары A, B и C, D на рисунке 17, *в*), то

[1] Основание логарифмов для нас пока безразлично.

сложное отношение отрицательно, а для отрицательных чисел логарифмы не определены. Значит, наше «расстояние» годится только для одной из двух частей проективной прямой, на которые она «разрезана» абсолютом (см. рис. 17, *а*).

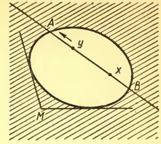


Рис. 43

Посмотрим, как обстоит дело на плоскости. В качестве абсолюта здесь следует выбрать такой геометрический образ — фигуру, задаваемую уравнением, — который с каждой прямой пересекался бы в двух точках. Такой образ, как установил еще Штейнер, есть коника. Она размыкает замкнутую проективную плоскость на две части (рис. 43). Если взять любые две точки X и Y во «внутренней» части абсолюта, то проведенная через них прямая пересечет абсолют в двух точках A и B и сложное отношение $(AB;\ XY)$ будет положительным. Его логарифм можно считать расстоянием для геометрии во внутренней части плоскости.

Итак, у нас все затруднения устранены. Но в истории геометрии дело обстояло сложнее... Клейн, к сожалению, не избежал судьбы многих ученых, делавших принципиально новые шаги в развитии идейных основ математики. Он подвергся жестокой критике за якобы имевшее место в его рассуждениях нарушение логики, за так называемый «порочный круг». Какой смысл, рассуждали противники Клейна, вводить новое понятие расстояния в геометрии через сложное отношение, если само сложное отношение есть, выражение, составленное из длин отрезков, т.е. из расстояний? Расстояние определяется через расстояние! Абсурд! Порочный круг! Среди этих противников был и отец классического математического анализа Вейерштрасс и, что обиднее всего, сам Кэли.

Клейн писал: «...тут мы снова встречаемся со своеобразным явлением: состарившийся дух не в состоянии сделать выводы из созданных им самим положений... к старости мозг утрачивает свою подвижность и пластичность». Действительно, в истории науки имеется немало примеров, подтверждающих грустный вывод Клейна. Однако это

не что иное, как диалектическое противоречие между старым и новым, которое в конце концов разрешается положительно: скептицизм старцев не в состоянии остановить молодежь в ее неудержимом стремлении вперед, а придирчивая критика старших приводит к более точному оформлению идей, выдвинутых молодыми.

На самом же деле в рассуждениях Клейна нет никакого порочного круга, так как понятие сложного отношения дано Штаудтом независимо от понятия расстояния (гл.5), а именно на Штаудта и опирается Клейн. При современном же аксиоматическом изложении проективной геометрии — таком, например, как у К.А. Андреева и Н.А. Глаголева, — отсутствие порочного круга становится совершенно очевидным. Но аксиоматический метод завоевал всеобщее признание уже после смерти всех противников молодого Клейна. А молодой Клейн, еще не зная, за что его будут ругать, решал другую задачу: как вычислять расстояния без непосредственного измерения, т.е. при помощи формул аналитический геометрии. Мы тоже попробуем решить эту задачу, только не совсем по Клейну, т.е. следуя логике, а не истории вопроса.

В евклидовой геометрии и в ее многочисленных приложениях расстояние между двумя точками тоже не измеряют, а, как правило, вычисляют. Если точки A и B имеют координаты $(x_1, y_1,)$ и (x_2, y_2), то

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \tag{1}$$

Вот такую же или, по крайней мере, похожую формулу для вычисления «неевклидова расстояния» от одной точки до другой внутри абсолюта нам и предстоит сейчас получить. Как? Формула (1) обычно получается как следствие теоремы Пифагора, но внутри абсолюта так не сделаешь: ведь в проективной геометрии не только теоремы Пифагора, но даже и прямоугольных треугольников нет!

Есть другой путь получения формулы (1), связанпый с понятием скалярного произведения векторов. Вспомним определение: «*Скалярным произведением* двух не нулевых векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними».

Известно, что если вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x_1, y_1), а вектор $\vec{b}$ — координаты (x_2, y_2) относительно декарто-

вой системы координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \; x_2 + y_1 \; y_2. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что длина вектора $\vec{a}$ с координатами (x, y) может быть найдена по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. А расстояние от точки A до точки B есть длина вектора $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Она вычисляется по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где (x_1, y_1) — координаты вектора $\overrightarrow{OA}$, а (x_2, y_2) — координаты вектора $\overrightarrow{OB}$. Мы получили формулу (1) другим путем — без теоремы Пифагора.

Этим мы и воспользуемся. Можно сказать: скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма попарных произведений их одноименных координат, т.е. принять формулу (2) за определение скалярного произведения. А дальше мы будем действовать по аналогии.

Возьмем две точки: $X\,(x_1 : x_2 : x_3)$ и $Y\,(y_1 : y_2 : y_3)$ на проективной плоскости и абсолют-конику $a_{ij}x_ix_j = 0$ (здесь — см. гл. 9 — суммирование по i и j). Назовем *квазискалярным произведением* точек X и Y выражение $a_{ij}x_ix_j$, которое обозначим $X * Y$.

Легко проверить, что это произведение для любого абсолюта будет обладать свойствами обычного скалярного произведения, а именно:

$$X * Y = Y * X, \;\; kX * Y = X * kY,$$
$$X * (Y + Z) = X * Y + X * Z.$$

По существу, мы ввели лишь некоторое сокращенное обозначение для выражения $a_{ij}x_ix_j$. Но важно, что пока остается неизменным абсолют, неизменным остается и квазискалярное произведение. Это утверждение не совсем точно, оно верно только «с точностью до общего множителя». Ведь коника остается той же самой, если ее уравнение умножить на произвольное число, отличное от нуля, и точка остается той же самой, если ее однородные координаты умножить на одно и то же число. Квазискалярное произведение умножится на эти числа, т.е. в общем случае изменится (приобретет некоторый множитель). Но у нас будут фигурировать только такие выражения, в которых этот множитель будет сокращаться!

Зададим абсолют простейшим уравнением:

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Для него квазискалярное произведение двух точек имеет вид

$$X * Y = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

а уравнение самого абсолюта можно записать так:

$$X * X = 0.$$

Отсюда, между прочим, следует, что для точек абсолюта и только для них «квазискалярный квадрат» $(X * X)$ обращается в нуль. Теперь возьмем две точки на прямой $x_3 = 0$ — нарушения общности нет, любую прямую можно принять за сторону координатного треугольника[1]. Для них квазискалярное произведение выглядит проще: $X * Y = x_1 y_1 - x_2 y_2$, т.е. почти так же, как в евклидовой геометрии. Теперь, наконец, попробуем вычислить расстояние между точками X и Y, но будем стремиться к тому, чтобы в формуле фигурировали только квазискалярные произведения. Сначала найдем точки A и B пересечения прямой $x_3 = 0$ с абсолютом. Решив систему

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

получим: $A(1 : 1 : 0)$, $B(1 : -1 : 0)$. По формуле (3′) из главы девятой вычислим сложное отношение:

$$(AB; XY) = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 + x_1)} = \frac{X*Y + x_1 y_2 - x_2 y_1}{X*Y - x_1 y_2 + x_2 y_1}.$$

Получилось почти то, что нам надо, — слева сложное отношение (его логарифм мы и называли неевклидовым расстоянием), справа... Вот справа нечто неряшливое — там и квазискалярное произведение (оно нам нравится!) и еще какие-то выражения, которые нам мешают. Попробуем избавиться от них. Применим еще одну маленькую

---

[1] Заметим, что проективных систем координат, относительно которых уравнение коники будет иметь простейший вид, т. е. автополярных треугольников, существует бесконечно много (см. гл. 9, рис. 33).

хитрость — используем следующие тождества:

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = x_1^2 y_2^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2 y_1^2 =$$

$$= x_1^2 y_1^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2 y_2^2 - (x_1^2 y_1^2 - x_2^2 y_2^2 - x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2) =$$

$$= (x_1y_1 - x_2y_2)^2 - (x_1^2 - x_2^2)(y_1^2 - y_2^2) =$$

$$(X*Y)^2 - (X*X)(Y*Y).$$

Они дают возможность переписать предыдущую формулу так:

$$(AB;\ XY) = \frac{X*Y + \sqrt{(X*Y)^2 - (X*X)(Y*Y)}}{X*Y - \sqrt{(X*Y)^2 - (X*X)(Y*Y)}}.$$

Выражение стало внешне не более простым, но зато содержащим только квазискалярные произведения. Следовательно, эта формула годится не только для прямой $X_3 = 0$, но и для всех прямых и при любом задании абсолюта. Кроме того (проверьте!), все беспокоившие нас множители сократятся. В таких случаях говорят, что формула приняла инвариантный вид.

Итак, мы получили «метрику», т.е. формулу для вычисления «расстояний»[1].

$$d(X,\ Y) = \log\ \frac{X*Y + \sqrt{(X*Y)^2 - (X*X)(Y*Y)}}{X*Y - \sqrt{(X*Y)^2 - (X*X)(Y*Y)}}. \quad (\text{Гр})$$

Мы можем приступить к изучению геометрии внутри абсолюта.

---

[1] Символ (Гр), которым мы обозначили эту формулу, означает «*гиперболическая метрика* для расстояний». Мы увидим в дальнейшем, что существуют еще и другие метрики, т. е. другие формулы для вычисления расстояний углов. Термины «*гиперболический*», «*эллиптический*», «*параболический*» очень часто употребляются в математике в тех ситуациях, которые сходны с ситуацией, возникающей при решении задач о пересечении коники с прямой: первый соответствует наличию двух действительных решений, второй — двух мнимых, третий — одного действительного. Если речь идет о несобственной прямой на расширенной евклидовой плоскости, то получаются обычные эллипс, гипербола и парабола (см. рис. 37).

Глава тринадцатая

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

В этой главе мы начнем знакомиться с наиболее важными геометриями, которые получаются из проективной при помощи абсолюта-коники и являются метрическими.

Они называются неевклидовыми. Почему же именно они получили это название? Ведь и неметрические геометрии, рассмотренные в одиннадцатой главе, и сама проективная геометрия тоже не являются евклидовыми. Дело в том, что из геометрий, базирующихся на системе аксиом, отличной от аксиом Евклида, первой была открыта метрическая геометрия, носящая имя нашего великого соотечественника Николая Ивановича Лобачевского (1792—1856).

Первое сообщение о ней было сделано в 1826 году, задолго до появления Эрлангенской программы. Новую геометрию Лобачевский построил на аксиоматической основе задолго до рождения Гильберта. Не удивительно поэтому, что и это сообщение, и все дальнейшие работы Лобачевского (а он продолжал разрабатывать свою геометрию до последних дней жизни) не были поняты почти никем из современников. О трагической судьбе, стойкости духа и великом научном подвиге Лобачевского, о еще более трагической жизни венгерского геометра Бойаи, сделавшего первые шаги в том же направлении, что и Лобачевский, почти одновременно с ним, о по меньшей мере странном поведении знаменитого Гаусса, читавшего и понимавшего работы Лобачевского и Бойаи, но не решившегося поддержать их, написано очень много, и

мы позволим себе не рассказывать здесь об исторических подробностях.


Н. И. Лобачевский

Отметим только, что геометрия Лобачевского началась с замены пятого постулата Евклида (см. гл. 5) другим. Возникшая при этом новая геометрия, как выяснилось позднее, отличается от строго аксиоматически построенной евклидовой геометрии только одной аксиомой. В теории Клейна, представляющей собой совершенно другой подход к неевклидовым геометриям, первой появляется геометрия Лобачевского, а геометрия Евклида — гораздо позднее. Может быть, это плохо? Ведь получается, что сложное предшествует простому, менее наглядное — более наглядному. Впрочем, и наглядность геометрии Евклида весьма условна.

С другой стороны, мы сейчас убедимся, что геометрию Лобачевского, геометрию внутри абсолюта, можно «увидеть» без всяких усилий. Именно поэтому некоторые ученые и сейчас используют ее в качестве модели для описания многих ситуаций, возникающих в теоретической физике.

ШАГ ПЯТЫЙ. «СТЕПЬ ДА СТЕПЬ КРУГОМ...»

Итак, представьте себе... Нет, не проективную плоскость, да еще разрезанную на две части, а что-нибудь «попроще» — степь в Омской области или где-нибудь на Украине... Нет никакого транспорта — ни самолета, ни «Жигулей». Вокруг только снег или трава. А вдали — линия горизонта. Горизонт — окружность (кривая второго порядка!) — абсолют. Он недоступен: транспорта нет. Но внутри абсолюта все видно. Точки ведут себя очень хорошо — через две проходит одна и только одна прямая (рис.44). А вот прямые... Они ограничены абсолютом и поэтому «коротковаты по сравнению с евклидовы-

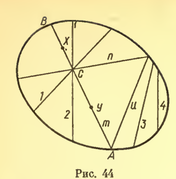


Рис. 44

ми прямыми. Там бесконечно удаленные точки были «не видны простым глазом», а здесь — вот они, рядом, только их все равно не достать: они на абсолюте-горизонте. Расстояние до них бесконечно велико. В самом деле, пусть точка Y на рисунке 44 стремится к бесконечно удаленной точке A. Вычислим предел:

$$\lim_{Y\to A} d(X, Y) = \lim_{Y\to A} \log(AB; XY) = \lim_{Y\to A} \log\left(\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB}\right) =$$

$$= \lim_{Y\to A} (\log AX - \log XB - \log AY + \log YB) =$$

$$= \log AX - \log XB + \log AB - \lim_{Y\to A} \log AY.$$

Первые три слагаемых — некоторые числа, а четвертое... Этот предел равен бесконечности. Следовательно, и $\lim\limits_{Y\to A} d(X,Y)=\infty$, в чем мы и хотели убедиться.

Как же обстоит дело с пересечением прямых? Прямые *1* и *2* (см. рис. 44) пересекаются, прямые *3*, *4* — нет. Они называются *расходящимися*. Интересно проверить знаменитый пятый постулат. Сколько прямых (умещающихся, естественно, внутри абсолюта, до горизонта) проходит через данную точку C так, что они не пересекаются с данной прямой u? У Евклида — одна и только одна, именуемая параллельной. А в нашей причудливой, но вполне реальной, наглядной геометрии? Оказывается, сколько угодно. Среди них есть две «предельные», которые встречают данную прямую «там, на горизонте», т.е. на абсолюте (прямые m и n). Они-то и называются в геометрии Лобачевского *параллельными к прямой* u.

Все просто, наглядно и понятно. И вот эту-то совершенно очевидную ситуацию Лобачевский называл в своих первых работах «воображаемой геометрией». Дело в том, что он лишь чувствовал, что евклидова геометрия не является единственно возможной абстрактной математической теорией, соответствующей реальному физи-

ческому пространству. И не только чувствовал, но и доказал, что логически допустима и другая теория параллельных и, следовательно, другая геометрия. Лобачевский искал ее модель в межзвездном пространстве. А достаточно было выйти в степь... Как все великие теории просты, когда они изучаются, и как они недоступны, когда создаются!

Мы еще вернемся к геометрии Лобачевского хотя бы для того, чтобы научиться измерять углы, а пока нам нужно сделать остановку.

Остановка первая. «Там, за горизонтом»

Посмотрим теперь, что происходит «по ту сторону» абсолюта. Там дело, возможно, будет обстоять несколько сложнее, так как нет (может быть, просто еще никто не придумал?) столь наглядной интерпретации (если вам не нравится это мудреное слово, то говорите просто «модель»), какую мы нашли в степи[1]. Впрочем, сложности есть и в геометрии Лобачевского (и даже в геометрии Евклида!). Только мы просто пока их не замечали, так как не занимались измерением углов.

Начнем с введения метрики вне абсолюта. Следуя Кэли, мы вновь пойдем алгебраическим путем, т.е. зададим абсолют

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

и прямую

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Пользуясь относительной свободой выбора проективной системы координат, последнее уравнение можно привести к виду $x_1 = 0$, или $x_3 = 0$, или $x_2 = 0$. Но в первых двух случаях прямая пересекает абсолют, и мы снова придем к формуле (Гр), не получив ничего нового. Если же получится $x_2 = 0$, то это означает, что прямая не пересекает абсолюта. В существовании двух «сортов» прямых — пересекающих и не пересекающих абсолют (рис. 45) — как раз и заключается первая сложность ге-

[1] Эта интерпретация называется интерпретацией Кэли — Клейна, в честь математиков, с идеями которых связано ее возникновение.

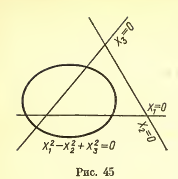


Рис. 45

ометрии «по ту сторону» абсолюта. Взяв на прямой $x_2 = 0$ точки X $(x_1 : 0 : x_3)$ и $Y(y_1 : 0 : y_3)$, мы должны определить соответствующий им проективный инвариант, обладающий свойствами расстояния и связанный с абсолютом. Но для этого нужны еще две точки, которые «чистому» геометру — Штейнеру, например, — взять негде, ибо по Штейнеру эта прямая не имеет ничего общего с абсолютом. Но Шаль сказал бы: имеет! И Кэли вслед за ним утверждает: система уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

имеет решения, но мнимые: $x_1 : x_2 : x_3 = \pm\sqrt{-1} : 0 : 1 = \pm i : 0 : 1$. Мы получили две мнимые точки пересечения прямой с абсолютом: $A\ (i : 0 : 1)$ и $B\ (-i : 0 : 1)$.

К сожалению, комплексные числа сейчас из школьной математики изгнаны. Но о них написано много популярных книжек, к которым мы и отсылаем читателя. Нам же достаточно считать, что аксиоматически введена буква i, на которую распространяются все правила обычной алгебры, но возведение в квадрат производится по формуле $ii = i^2 = -1$.

Воспользовавшись формулой (3′) главы девятой, вычислим сложное отношение:

$$(AB;\, XY) = \frac{(x_1 - ix_3)\,(y_1 + iy_3)}{(x_1 + ix_3)\,(y_1 - iy_3)}.$$

Имея в виду, что

$$\frac{1}{x_1 + ix_3} = \frac{x_1 - ix_3}{(x_1 + ix_3)\,(x_1 - ix_3)} = \frac{x_1 - ix_3}{x_1^2 + x_3^2},$$

получим:

$$(AB;\, XY) = \frac{(x_1 - ix_3)^2\,(y_1 + iy_3)^2}{(x_1^2 + x_3^2)\,(y_1^2 + y_3^2)}.$$

Довольно громоздко? Да, но ведь все в нашей власти — мы ищем как можно более простое выражение для инва-

рианта и можем взять для него в принципе любую функцию от сложного отношения, лишь бы (это потом придется проверить!) для нее выполнялись аксиомы «расстояния». Например, раз появились квадраты, возьмем корень квадратный:

$$\sqrt{(AB;\ XY)} = \frac{(x_1 - ix_3)(y_1 + iy_3)}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_3^2}}.$$

Выполнив простые преобразования, получим:

$$\sqrt{(AB;\ XY)} = \frac{x_1 y_1 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_3^2}} + $$

$$+ i\ \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_3^2}}.$$

Теперь оба коэффициента — самые обыкновенные действительные числа. Выражение для корня из сложного отношения получилось в виде комплексного числа в самом простом (алгебраическом) виде. Обозначим его $\alpha + \beta i$, где

$$\alpha = \frac{x_1 y_1 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_3^2}}, \quad \beta = \frac{x_1 y_3 - x_3 y_1}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_3^2}}.$$

Итак, $\sqrt{(AB;\ XY)} = \alpha + \beta i$. При любых x_1, x_3, y_1 и y_3 числа α и β обладают очевидным свойством $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (проверьте!). На что это похоже? Что это напоминает? Еще в VIII классе говорилось и даже доказывалось, что $\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$. Значит, существует такой аргумент ω, что $\alpha = \cos\omega$, $\beta = \sin\omega$.
Поэтому

$$\sqrt{(AB;\ XY)} = \cos\omega + i\sin\omega. \qquad (3)$$

До сих пор мы не требовали от читателя знаний, выходящих за рамки той или иной школьной программы. Но теперь нам понадобится одна удивительная формула, которую, конечно, знал Клейн, ибо она была найдена великим Эйлером еще в XVIII веке:

$$\cos\omega + i\sin\omega = e^{i\omega} \qquad (4)$$

(здесь e — основание натуральных логарифмов). Мы не будем объяснять ее происхождение и тем более доказывать ее. Поверьте, что она верна при любом значении действительного аргумента ω.

Прологарифмируем формулу (4):

$$\ln(\cos\omega + i\sin\omega) = i\omega.$$

Прологарифмируем формулу (3):

$$\frac{1}{2}\ln(AB;\, XY) = \ln(\cos\omega + i\sin\omega).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\ln(AB;\, XY) = i\omega,$$

и мы можем выразить число ω как некоторую функцию сложного отношения четырех точек (две из которых, а именно A и B, мнимые)

$$\omega = \frac{1}{2i}\ln(AB;\, XY) = -\frac{i}{2}\ln(AB;\, XY). \qquad (5)$$

Итак, мы нашли проективный инвариант пары точек для геометрии «за горизонтом»! Число ω — действительное, хотя в формуле справа и фигурирует мнимая единица i. Однако обнаруживаются несколько необычные вещи. Теперь на прямой нет недоступных точек. Ни точка X (действительная), ни точка Y (тоже действительная) не могут стремиться к точкам A и B, ибо этих точек нет даже на горизонте, на абсолюте. Возникает удивительный факт: расстояние движущейся по прямой точки Y от фиксированной точки X не может возрастать беспредельно! Более того, так как проективная прямая не пересекается с абсолютом, то ее, эту прямую, можно обойти всю и вычислить ее длину, подобно тому как мы вычисляем длину экватора или меридиана земного шара. В самом деле, ведь $\omega = \arccos\alpha$[1], т.е.

$$\omega = \arccos\frac{x_1y_1 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_3^2}}. \qquad (6)$$

[1] Теперь понятно, почему у Кэли вместо логарифмов могли фигурировать арккосинусы!

Зафиксируем начало счета длины нашей прямой, например точку с координатами $y_1 : 0 : y_3 = 0 : 0 : 1$. Тогда расстояние ω_y от нее до точки $x_1 : 0 : x_3$ будет равно:

$$\omega = \arccos \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}} = \arccos \frac{\frac{x_3}{x_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2}}.$$

Из теории тригонометрических функций известно, что если переменная $x = \frac{x_3}{x_1}$ пробегает все возможные значения от $-\infty$ до ∞, то $\arccos x$ пробегает всего лишь интервал от π до 0. Следовательно, длина всей «эллиптической» прямой составляет всего лишь $\pi = 3{,}14...$ Конечно, можно взять другую единицу измерения и получить более «солидное» число, но все-таки длина прямой остается конечной величиной!

Теперь запишем формулу (6) инвариантно, т.е. при помощи квазискалярного произведения. Для точек X $(x_1 : 0 : x_3)$ и Y $(y_1 : 0 : y_3)$ оно имеет вид:

$$X * Y = x_1 y_1 + x_3 y_3.$$

Следовательно,

$$\omega = \arccos \frac{X * Y}{\sqrt{X * X} \sqrt{Y * Y}}. \qquad (\text{Эр})$$

Эта формула[1] «действует» для точек на любой прямой, не пересекающей абсолют (в действительных точках). Выглядит она даже несколько проще, чем ранее выведенная формула для расстояния между точками внутри абсолюта.

Вопрос о том, как измерять расстояние на прямых, касающихся абсолюта, мы считаем не подлежащим рассмотрению, так как эти прямые «недоступны», не принадлежат нашей геометрии.

---

[1] Символ (Эр) означает «*эллиптическая метрика* для расстояний» (см. сноску на с. 117).

ШАГ НАЗАД. ЕЩЕ О ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Вернемся к геометрии внутри абсолюта — к геометрии Лобачевского, ибо теперь принцип двойственности позволит нам найти способ измерения углов, — не зря мы сделали прогулку «за горизонт»!

Как обстоит дело? Надо определить величину угла между двумя прямыми как число, инвариантное относительно всех преобразований, сохраняющих абсолют. Это число должно обладать всеми свойствами «расстояния» точно так же, как и обычные углы, которые мы измеряли в школе при помощи транспортира. Разумеется, надо брать пересекающиеся прямые. И, конечно, о сумме углов можно говорить только тогда, когда они имеют общую вершину.

По принципу двойственности новый абсолют мы должны представлять себе как совокупность прямых, касающихся коники (см. рис. 12; касательная – как и в случае окружности — есть прямая, имеющая с коникой только одну общую точку).

Понять, как измерять расстояния, нам помогли координаты точек. А сейчас, когда мы хотим измерять величину угла между прямыми, нам нужны... «координаты прямой». Но что это такое? Всем ясен термин «координаты точки», а для прямой мы имеем нечто другое — уравнение. С него и начнем.

Относительно проективной системы координат прямая задается линейным однородным уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \qquad (7)$$

где x_i — однородные координаты точек, лежащих на прямой, а u_i — числа, коэффициенты (раньше мы их обозначали a_i). Эти коэффициенты вполне определяют прямую, подобно тому как коэффициенты k и b вполне определяют прямую, заданную уравнением $y = kx + b$ на евклидовой плоскости. Числа u_i определяются с точностью до общего множителя, и любая их тройка, кроме трех нулей, определяет единственную прямую. Например, так как прямая A_1E (рис. 46) проходит через точки A_1 (1 : 0 :0) и E(1 : 1 : 1), то ее уравнение будет иметь коэффициенты $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ и $u_3 = 1$ (точнее, $u_1 : u_2 : u_3 = 0 : 1 : 1$) и запишется в виде $x_2 - x_3 = 0$. Прямая $M'N$ имеет координаты (2 : 3 : —3) и уравнение

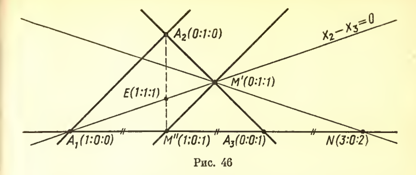


Рис. 46

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0$. Прямая $M'M''$ имеет координаты $(1:1:-1)$ и уравнение $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Зафиксируем числа x_i, объявим их постоянными (т.е., по существу, зафиксируем некоторую точку с координатами $x_1 : x_2 : x_3$) и будем считать переменными коэффициенты u_i (вот почему мы отказались от обозначения a_i : со времен Декарта переменные обозначают буквами из конца алфавита). Получилось уравнение первой степени с тремя переменными u_1, u_2, u_3. Каждому набору $(u_1 : u_2 : u_3)$ отвечает одна прямая, проходящая через точку X $(x_1 : x_2 : x_3)$, а в целом получается пучок прямых, проходящих через эту точку.

Сказанного достаточно, чтобы согласиться называть числа u_i *однородными координатами прямой*. Их часто называют также *тангенциальными координатами* (от латинского tango — касаюсь). Можно ли записать уравнение коники в тангенциальных координатах? Конечно, да. И оно тоже будет уравнением второй степени, ибо в пучке прямых в общем случае содержится самое большее две касательные (рис. 47). В самом деле, пусть коника задана «точечным» уравнением $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$. Для определения точек пересечения произвольной прямой с ней надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_2^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

сводящуюся к квадратному уравнению

$$(u_2^2 - u_1^2)\,x^2 - 2u_1u_2x + u_2^2 - u_3^2 = 0,$$

где $x = x_1 : x_3$. Прямая $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ явля-

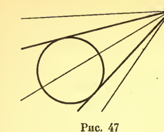


Рис. 47

ется касательной, если она имеет только одну общую точку с кривой $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$, т.е. если полученное квадратное уравнение имеет нулевой дискриминант: $u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 = 0$. Это и есть тангенциальное уравнение коники (1), т. е. абсолюта. Внешне оно выглядит так же, как и точечное. Принцип двойственности торжествует и в аналитике. Если же для прямых, как и для точек, ввести квазискалярное произведение, то это уравнение можно записать еще короче:

$$(U * U) = 0.$$

Но из точки внутри абсолюта нельзя провести ни одной касательной к нему. Значит, в этом случае система (8) будет иметь мнимые решения! А вся аналитическая часть пройдет точно так же, как для точек «за горизонтом»! Следует только повсюду писать буквы u_i вместо x_i.

Поэтому угол между двумя прямыми U $(u_1 : 0 : u_3)$ и V $(v_1 : 0 : v_3)$ в геометрии Лобачевского можно вычислить по формуле

$$\omega(U, V) = \arccos \frac{u_1 v_1 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}\sqrt{u_3^2 + v_3^2}}, \qquad (9)$$

если вершина угла принята за точку A_2 координатной системы. Применив квазискалярное произведение прямых, эту формулу[1] можно записать для общего случая:

$$\omega = \arccos \frac{U * V}{\sqrt{U * U}\sqrt{V * V}}. \qquad (\text{Эу})$$

Величина угла ω, вычисленная по этой формуле, может изменяться от 0 до π (ср. с формулой (Эр)). Мы привыкли рассматривать углы между лучами и считать, что они изменяются от 0 до 2π: при повороте на 2π луч совпадает со своим первоначальным положением. Однако величина угла между двумя прямыми будет изменять-

[1] Обозначение (Эу) расшифровывается так: «*эллиптическая метрика* для углов» (см. сноску на с. 125).

ся от 0 до π, так как прямая совпадает со своим первоначальным положением именно при вращении на π, т.е. «вдвое быстрее».

Рассмотрение геометрии «за горизонтом» помогло нам — благодаря принципу двойственности — научиться измерять и вычислять инвариант двух прямых — величину угла с вершиной внутри абсолюта.

Итак, первой и с проективной точки зрения наиболее естественной метрической геометрией оказалась геометрия внутри абсолюта. Ее метрики определяются формулами (Гр) и (Эу). Они очень различны. Расстояние $d(X, Y)$ может стремиться к бесконечности, а угол может изменяться только от нуля до π.

ШАГ ШЕСТОЙ. ДВЕ ГЕОМЕТРИИ ЗА ГОРИЗОНТОМ

Геометрия Лобачевского получилась внутри абсолюта. Теперь надо обратиться к «внешней» геометрии — там, за горизонтом.

Во внешней области имеются два сорта прямых: пересекающие абсолют (они не замыкаются, так как внутрь абсолюта войти нельзя) и не пересекающие его («замкнутые»). Прямые, разделяющие эти два сорта (касающиеся абсолюта), из рассмотрения исключаются: они инцидентны абсолюту и, следовательно, являются недоступными, «несобственными». Расстояния на прямых первого сорта можно вычислять по формуле (Гр), а на прямых второго сорта — по формуле (Эр). По-разному обстоит дело и с пересечением разных прямых (рис. 48): прямые II_1 и II_2 пересекающиеся, прямые I_1 и I_3 пресекающиеся, прямые I_1 и I_2 расходящиеся, прямые I_1 и I_4 параллельные.

Как быть с этими разными прямыми? Можно все (кроме несобственных) включить в новую геометрию. Но тогда на разных прямых будет разная метрика. Такую геометрию тоже можно исследовать. Однако в ней будет иметь место неравноправие между точками и прямыми: в нее «войдут» все прямые проективной плоскости, а точки — только те, которые находятся вне абсолюта. Мы ограничимся признанием возможности такой геометрии, а подробнее рассмотрим две другие, каждая из которых содержит только один сорт прямых.

Итак, пусть прямыми новой геометрии считаются только те, которые пересекают абсолют. Пересекаться они

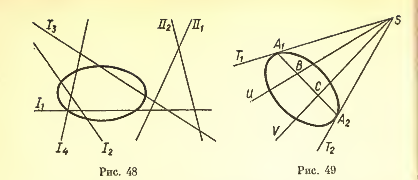


Рис. 48

Рис. 49

могут только в точках новой геометрии — за горизонтом. Значит (рис. 49), только пары вида SU, SV образуют угол. Вычислить величину такого угла можно через сложное отношение четырех действительных прямых проективной плоскости.

Формула для вычисления угла будет иметь вид формулы (Гр) с заменой точечных координат на тангенциальные ((Гу) — гиперболическая метрика углов, см. сноску на с. 117):

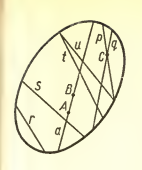
$$\omega(U, V) = \ln \frac{U * V + \sqrt{(U * V)^2 - (U * U)(V * V)}}{U * V - \sqrt{(U * V)^2 - (U * U)(V * V)}}. \quad \text{(Гу)}$$

Пучок прямых с центром в точке S не замкнутый: вращаясь вокруг S в направлении к V, прямая U никогда не придет «обратно», так как прямые второго сорта, проходящие через S, нашей геометрии не принадлежат. Угол может оказаться равным сколь угодно большому числу при любом масштабе измерения, ибо, например,

$$\lim_{V \to T_2} \ln (T_1 T_2; UV) = \infty.$$

Вся эта картина полностью соответствует по принципу двойственности той ситуации, которую мы подробно описали во время первой остановки для точек на прямой, «разрезанной» абсолютом.

Как обстоит дело с расстоянием между двумя точками? Сразу следует иметь в виду, что теперь не любые две точки определяют прямую, а только те, которые определяют прямую первого сорта — прямые второго сорта исключены! Но этой странности не следует удивляться: по принципу двойственности таким точкам, которые не опреде-



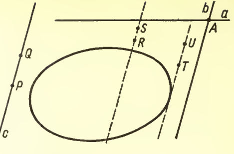


Рис. 50

ляют прямую, соответствуют расходящиеся прямые. Такие пары точек мы уже называли несоединимыми, так как их нельзя соединить прямой. Расстояние же между соединимыми точками определится по формуле (Гр) — здесь и для точек остается гиперболическая метрика. Поэтому-то последнюю геометрию называют *дважды гиперболической*. При всей ее странности она обладает милым сердцу проективиста свойством: на ней полностью действует принцип двойственности. Точки и прямые здесь совершенно равноправны: несоединимым точкам соответствуют расходящиеся прямые, соединимым — пересекающиеся. Читатель сам должен догадаться, какие точки в дважды гиперболической геометрии соответствуют «параллельным» прямым (последние определяются, конечно, точно так же, как и в геометрии Лобачевского).

Теперь скажем несколько слов о геометрии, содержащей только прямые второго сорта. Она получается автоматически (рис. 50) из геометрии Лобачевского применением принципа двойственности (слева на рисунке и в таблице — факты геометрии Лобачевского, справа — факты новой двойственной геометрии):

Любые две различные точки A, B определяют инцидентную им прямую a.	Любые две различные прямые a, b, определяют инцидентную им точку A.
Прямые p, q определяют точку C.	Точки P и Q определяют прямую c.
Прямые r, s — расходящиеся.	Точки R, S — несоединимые.

Прямые t, u — «параллельные», т.е. пересекаются в несобственной точке.

Точки T, U лежат на несобственной прямой.

Так как геометрия Лобачевского часто называется гиперболической, то новую геометрию называют когиперболической[1].

На этом мы заканчиваем краткий очерк геометрий за горизонтом. Когда они станут моднее или, лучше сказать, нужнее, популяризаторы заговорят о них подробнее. А для геометра они ничем не хуже других неевклидовых геометрий. Правда, они со странностями, но у кого их нет?

---

[1] Приставка «ко» широко применяется в современной математике во всех ситуациях, где имеет место та или иная двойственность (вспомните косинус, котангенс).

Глава четырнадцатая

ГДЕ ЖЕ ЕВКЛИД?

Итак, первые простейшие абсолюты исследованы — они породили четыре неметрические геометрии, описанные в одиннадцатой главе. Следующий абсолют — коника — дал нам еще три геометрии, на этот раз метрические, т.е. такие, в которых можно ввести способы измерения углов и расстояний. Однако евклидова геометрия и евклидова метрика (та, в которой расстояние выражается формулой $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$) так нам пока и не встретились. В чем дело? Где же Евклид?

Мы знаем, что, кроме точек, прямых и кривой второго порядка, существуют и более сложные геометрические фигуры. Может быть, в качестве абсолюта евклидовой геометрии они и нужны? Или мы поторопились и, рассматривая конику, были недостаточно внимательны и пропустили какую-либо возможность?

Проверим! Еще в девятой главе мы отметили, что существует пять видов коник. В качестве абсолюта мы взяли одну из них — «настоящую» кривую. А остальные? Попробуем испытать и «ненастоящие» — мнимые и распадающиеся. Но сначала — историческое отступление.

Остановка вторая. Как устроен мир?

В 1826 году, том самом, когда Лобачевский сделал первый доклад об открытой им геометрии, в германской провинции Ганновер родился создатель второй неевкли-



Бернгард Риман

довой геометрии Бернгард Риман. Его отец был сельским священником. Хрупкий, болезненный мальчик посещал гимназию всего в течение семи лет, но уже в эти годы глубоко изучил работы классиков математики Эйлера и Лежандра. Однако отец послал его в геттингенский университет учиться богословию. Недолгое знакомство с богословскими «науками» имело для Римана и положительное значение: он понял, что на этом пути нельзя познать устройство мира, и глубоко заинтересовался самим этим устройством.

В Геттингене в это время был другой бог — великий, недосягаемый семидесятилетний Гаусс, который уже не читал лекций и почти ни с кем не встречался, так как студенты и молодые математики его просто не понимали. Но крупнейшие математики всего мира были покорены его чрезвычайно глубоким и тщательно отделанными математическими шедеврами и при жизни единодушно называли его princeps mathematicorum, т.е. королем математиков.

Король математиков был похож на настоящих королей: он не хотел делить свою славу с другими. Но его идеи все же проникали в воздух науки, и прежде всего в воздух Геттингена. Риман почти не общался с Гауссом, но он воспринял и глубоко развил его мысли, и даже те, которые никому не были известны, в том числе и идею о множественности геометрических систем.

Мистика или телепатия? Клейн объясняет это так: «Духовное окружение, в которое попадает человек, гораздо важнее и оказывает на него большее влияние, чем факты и конкретные знания, которые ему сообщаются». За фактами Риман отправился в Берлин, где в течение двух лет слушал тамошних корифеев Вейерштрасса, Якоби и Дирихле. Именно у Дирихле он воспринял противоположный гауссовскому «modus vivendi» (образ жизни): не ждать полного созревания идеи, делиться

ею со всеми, не бояться «уронить свой авторитет».

В 1849 году двадцатитрехлетний Риман вернулся в Геттинген. Внешне — тщедушный, робкий студент, внутренне — вполне сложившийся гениальный ученый. Из опубликованных отрывков писем Римана видно, что уже тогда у него возникли и приобрели отчетливый вид основные идеи, предвосхитившие многие открытия физики последующих десятилетий. Но почти все эти идеи нуждались в математическом обосновании, для которого не хватало имевшегося тогда математического аппарата. И Риман занялся созданием такого аппарата — делом, потребовавшим от него всей жизни. Уже в 1851 году появилась его диссертация по теории функций комплексного переменного, на многие годы определившая пути развития этой науки и ее приложений. Летом 1854 года, чтобы заслужить право преподавания в университете, он представил еще одну диссертацию (о тригонометрических рядах) и пробную лекцию «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Лекция была написана, как утверждают современники, специально для Гаусса, так как бо́льшая ее часть содержит глубокое обобщение гауссовой теории кривизны поверхности на многомерный случай. Это обобщение дает возможность строить огромное количество новых геометрических систем и искать среди них ту, которая наиболее точно отражает действительность и, следовательно, помогает понять «устройство мира».

Но если диссертация 1851 года носила традиционный законченный характер и была опубликована в том же году, то диссертация и лекция 1854 года были опубликованы только посмертно.

Римана понимали очень немногие. В октябре 1854 года он с восторгом сообщает отцу, что его лекции слушают уже... восемь человек, а в ноябре — что ему «удается преодолевать смущение и устанавливать контакт со слушателями»... Тем не менее в 1859 году он становится профессором, заняв место одного из самых близких ему людей — место только что умершего Дирихле, который четыре года назад заменил Гаусса. В это время интересы Римана все более склоняются к физике и философии — он подготовил для этого математический фундамент.

Но только три года Риман мог наслаждаться своей силой и величием. В 1862 году туберкулез вывел его из строя. Ни врачи, ни итальянский климат (друзья и жена

сумели отправить его на Лаго-Маджоре за счет государства) не помогли — в 1866 году он скончался, оставив всего один том сочинений, но каких сочинений!

Ф. Клейн с полным основанием писал: «Никто другой не оказал более решительного влияния на современную математику, чем Риман». И по сей день творчество Римана служит основой для самых глубоких исследований и в математике, и в физике.

Печальная и завидная судьба! В XIX веке, задолго до «кризиса в физике», до Эрлангенской программы, поставить вопрос «как же устроен мир?», так много подготовить для его решения и так рано умереть! Понять, что «мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике» (это заключительные слова «лекции для Гаусса»), и не дожить до того, как спустя несколько десятилетий физики, опираясь на его идеи, переступят этот порог...

Из многих замечательных идей Римана им самим меньше всех других была разработана та, которая впоследствии стала называться «геометрией Римана» и о которой мы сейчас расскажем.

ШАГ СЕДЬМОЙ. ГЕОМЕТРИЯ РИМАНА (ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ)

Возьмем в качестве абсолюта мнимую конику, т.е. совокупность решений уравнения (1) из девятой главы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Оно, как мы уже отмечали, не определяет ни одной действительной точки на проективной плоскости. Ни одной действительной? Но мы уже давно пользуемся мнимыми точками. Ничто не мешает нам рассматривать «пересечение» действительной прямой с мнимой коникой. При этом мы можем взять любую прямую: относительно мнимого абсолюта они все равноправны. И, как обычно, можно взять ее уравнение в простейшем виде. Например, в виде

$$x_2 = 0. \tag{1}$$

Решая систему

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

мы получаем две мнимые точки: $A\ (1:0:i)$ и $B\ (1:0:-i)$, «принадлежащие» нашей прямой. Но такие точки устанавливают на прямой эллиптическую метрику. Все рассуждения, сделанные во время третьей остановки, остаются в силе, снова для двух точек X и Y появляется мнимое сложное отношение с точками A и B пересечения прямой XY с абсолютом и «эллиптическая метрика расстояний»:

$$\omega(X, Y) = \arccos \frac{X * Y}{\sqrt{X * X}\ \sqrt{Y * Y}}, \qquad \text{(Эр)}$$

где квазискалярное произведение расшифровывается для произвольной пары точек (не обязательно на прямой $x_2 = 0$) так:

$$X * Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \qquad (3)$$

Разумеется, длина всякой прямой будет конечной, и прямая будет замкнутой.

Именно эту идею рассмотрения конечных прямых и предложил сам Риман.

Тангенциальное уравнение нашего абсолюта имеет вид

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0. \qquad (4)$$

Никакая действительная прямая $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ не принадлежит этому абсолюту, а для угла между двумя прямыми $U\ (u_1 : u_2 : u_3)$ и $V\ (v_1 : v_2 : v_3)$ получается эллиптическая метрика, такая же, как в геометрии Лобачевского:

$$\omega(U, V) = \arccos \frac{U * V}{\sqrt{U * U}\ \sqrt{V * V}},$$

где

$$U * V = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \qquad (5)$$

Итак, получилась геометрия, обе метрики которой эллиптические. Поэтому и сама геометрия обычно называется эллиптической, но мы, как и всюду, предпочитаем «персональное имя» — геометрия Римана. Очевидно, она сама себе двойственна, так же, как и дважды гиперболическая геометрия (см. «Шаг шестой»). Аксиоматическая геометрия Римана гораздо больше отличается от евклидовой (например, замкнутость прямых), чем геометрия Лобачевского.

Но где же все-таки Евклид? И действительный, и мнимый абсолюты уже использованы. Остается обратиться к абсолютам, распавшимся на прямые.

ШАГ ВОСЬМОЙ. АБСОЛЮТ РАСПАЛСЯ. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ МЕТРИКИ

Математика — наука серьезная. Но и в ней можно пошутить. Возьмем, например, уравнение первой степени

$$2x + 3y - 1 = 0.$$

Возведем его в квадрат; получим уравнение:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0.$$

Получилось уравнение второй степени. И если заранее не знать, как оно получено, легко поверить, что это уравнение — уравнение некоторой коники. А на самом деле — всего одна прямая. Аналитик подшутил над геометром! Эту шутку можно обобщить. Вместо возведения в квадрат одного уравнения первой степени можно перемножить друг на друга два уравнения первой степени (все ненулевые члены, конечно, слева) — и опять формально получится коника, а фактически пара прямых...

Однако шутки эти оказываются полезными. Даже такие формально полученные уравнения второй степени позволят вводить метрики.

Вспомним еще раз девятую главу и рассмотрим оставшиеся «ненастоящие» коники $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$, $x_1^2 = 0$.

Начнем по порядку. Имеем абсолют

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{6}$$

который можно трактовать как пару мнимых прямых m_1 и m_2 с уравнениями $x_1 + ix_2 = 0$ и $x_1 - ix_2 = 0$. Эти прямые имеют общую действительную точку $A_3 (0:0:1)$. Всякая прямая, кроме тех, которые проходят через A_3, пересекает наш абсолют в двух мнимых точках. Возникает эллиптическая метрика расстояний:

$$d(X, Y) = \arccos \frac{X * Y}{\sqrt{X * X}\ \sqrt{Y * Y}}, \tag{Эр}$$

где $X * Y = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Что касается прямых, проходящих через точку A_3, то их не следует включать в новую геометрию: они не доступны (вспомните второй шаг!).

Но как в этой геометрии измерять углы? Ведь никаких инвариантных отношений прямых здесь придумать нельзя (точно так же, как и в центропроективной геометрии). Надо искать какой-то другой инвариант, пригодный для нашего случая. Он должен выдерживать все преобразования подгруппы, сохраняющей абсолют $x_1^2 + x_2^2 = 0$.

Но тогда сначала надо записать эти преобразования! Вспомним еще раз центропроективную геометрию. Там весь абсолют состоял из одной точки A_3 $(0:0:1)$, а уравнения преобразований подгруппы имели вид (формулы (7) гл. 11):

$$x_1{}^* = a_{11}x_1 + a_{12}x_2;$$
$$x_2{}^* = a_{21}x_1 + a_{22}x_2; \qquad (7)$$
$$x_3{}^* = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Теперь появляется дополнительное требование: $(x_1{}^*)^2 + (x_2{}^*)^2 = \lambda\,(x_1^2 + x_2^2)$. В силу однородности координат можно считать $\lambda = 1$. Подставляя значения $x_1{}^*$ и $x_2{}^*$ из (7) в последнее отношение, получаем:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1;$$
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1;$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

Положим, $a_{11} = \cos\alpha$. Тогда легко найти (пользуясь тождеством $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), что $a_{12} = \sin\alpha$, $a_{21} = -\sin\alpha$, $a_{22} = \cos\alpha$ (изменение знака у a_{12} и a_{21} приведет лишь к изменению знака угла α, т.е. направления его отсчета, что в данном случае несущественно). Формулы (7) дают теперь «формулы движения» новой геометрии:

$$x_1{}^* = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha;$$
$$x_2{}^* = -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha; \qquad (8)$$
$$x_3{}^* = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Теперь перейдем к координатам прямых. В уравнение прямой $u_1{}^*x_1{}^* + u_2{}^*x_2{}^* + u_3{}^*x_3{}^* = 0$ подставим значения $x_i{}^*$

из (8) и сгруппируем по x_i: $(u_1^* \cos\alpha - u_2^* \sin\alpha + u_3^* a_{31}) x_1 + (u_1^* \sin\alpha + u_2^* \cos\alpha + a_{32} u_3^*) x_2 + a_{33} u_3^* x_3 = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$. Значит, для координат прямых получаются такие «формулы движения»:

$$u_1 = u_1^* \cos\alpha - u_2^* \sin\alpha + a_{31} u_3^*;$$
$$u_2 = u_1^* \sin\alpha + u_2^* \cos\alpha + a_{32} u_3^*; \qquad (9)$$
$$u_3 = u_3^* a_{33}.$$

Внимание! Теперь самое главное: ищем инвариант двух прямых $(u_1 : u_2 : u_3)$ и $(v_1 : v_2 : v_3)$, имея в виду, что v_i и v_i^* связаны точно такими же формулами, как (9). Сначала перейдем к неоднородным координатам, обозначив

$$\frac{u_1}{u_3} = u, \quad \frac{u_1^*}{u_3^*} = u^*, \quad \frac{u_2}{u_3} = v, \quad \frac{u_2^*}{u_3^*} = v^*. \qquad (10)$$

При этом исключается случай $u_3 = 0$. Но так и надо! Эти прямые, т.е. прямые $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 0$, проходящие через A_3, нашей геометрии не принадлежат. В неоднородных координатах формулы (9) примут вид

$$u = \frac{1}{a_{33}} (u^* \cos\alpha - v^* \sin\alpha) + a;$$
$$v = \frac{1}{a_{33}} (u^* \sin\alpha + v^* \cos\alpha) + b, \qquad (11)$$

где $a = a_{31} : a_{33}$; $b = a_{32} : a_{33}$. Делить на a_{33} можно, так как $a_{33} \neq 0$ в силу условия $\det \| a_{ij} \| = a_{33} \cdot 1 \neq 0$.

Составив разности соответствующих координат u, v и u', v' двух прямых, возведя эти разности в квадрат и сложив, получим:

$$(u - u')^2 + (v - v')^2 = \frac{1}{a_{33}^2} ((u^* - u'^*)^2 + (v^* - v'^*)^2). \quad (12)$$

Извлекая квадратный корень, получим:

$$\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2} = q \sqrt{(u^* - u'^*)^2 + (v^* - v'^*)^2},$$

где $q = 1 : a_{33}$.

Выражение $\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}$ должно быть читателю знакомо: именно так выражается расстояние между двумя точками на евклидовой плоскости, если точки имеют координаты (u, v) и (u', v'). Относительно «движений» (9) это выражение еще не является инвариантом. Не хватает чуть-чуть: убрать бы множитель q!

Конечно, просто так «убрать» нельзя — именно поэтому мы не смогли найти инвариант при помощи сложного отношения. Группа движений (9) не имеет инварианта двух прямых. Однако можно немножко сузить эту группу, положив в формулах (9) $a_{33} = 1$. Легко проверить, что новые движения снова образуют группу — подгруппу той группы, которая определилась формулами (9). Преобразования этой подгруппы в неоднородных координатах выглядят так:

$$u = u^* \cos\alpha - v^* \sin\alpha + a;$$
$$v = u^* \sin\alpha + v^* \cos\alpha + b. \qquad (13)$$

Относительно этой подгруппы выражение

$$\omega(u, v) = \sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2} \qquad \text{(Пу)}$$

является инвариантом. Может ли оно служить метрикой, т.е. удовлетворяет ли оно аксиомам расстояния? Конечно, удовлетворяет, ибо точно так же выглядит формула расстояния между двумя точками в евклидовой геометрии, а ведь с него все и началось, именно с него и «списаны» аксиомы расстояния. Итак, мы получили новую геометрию, первую геометрию с вырожденным абсолютом. Метрика расстояний в ней оказалась эллиптической, а метрика углов — не эллиптической и не гиперболической. Остается назвать ее *параболической*, что и отражено в обозначении (Пу). Как называется новая геометрия? Это пока наш маленький секрет.

ШАГ ДЕВЯТЫЙ. ЗДРАВСТВУЙ, ЕВКЛИД!

Итак, у нас появилась, наконец, формула (Пу), очень похожая на формулу для вычисления расстояний $d = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ евклидовой геометрии. Только в евклидовой геометрии — точки и их декартовы координаты,

а здесь — прямые и их тангенциальные координаты. Применим принцип двойственности!

Сначала получим новый абсолют: вместо пары мнимых прямых, имеющих общую действительную точку, возьмем пару мнимых точек, принадлежащих общей действительной прямой. Или, на «координатном языке», точку $A_3(0:0:1)$ заменим прямой с единственной ненулевой тангенциальной координатой, а пару мнимых прямых $x_1 \pm ix_2 = 0$, т.е. прямых с тангенциальными координатами $(1; \pm i; 0)$,— парой точек с такими же однородными координатами, а именно:

$$A_3\ (0:0:1) \longrightarrow a_3\ (0:0:1)$$
$$m_1\ (1:i:0) \longrightarrow M_1\ (1:i:0)$$
$$m_2\ (1:-i:0) \longrightarrow M_2\ (1:-i:0).$$

Легко предвидеть, что прямая a_3 будет играть роль нашей старой знакомой — несобственной прямой, недостижимого абсолюта. Этот абсолют мы имели в аффинной геометрии, но теперь он дополнен двумя мнимыми точками.

Прямые (u, v) превратятся в точки (x, y) — здесь мы сразу пишем неоднородные координаты. А формулы «движения» получатся из (13) в виде

$$\begin{aligned} x &= x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha + a; \\ y &= x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha + b. \end{aligned} \tag{14}$$

Их инвариантом будет расстояние между двумя точками (x, y) и (x', y'), вычисляемое по формуле

$$d = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\ . \qquad \text{(Пр)}$$

Мы получили параболическую метрику для расстояний, ту самую «изначальную» метрику, которая известна с древнейших времен (и со школьной скамьи). Формулы (14) и (Пр) являются формулами евклидовой геометрии.

Точки (x, y) рассмотренной на предыдущем шаге геометрии превратятся по принципу двойственности в прямые (u, v) новой геометрии, и для определения угла между двумя такими прямыми получится эллиптическая метрика, т. е. формула

$$\omega = \arccos \frac{U * V}{\sqrt{U * U}\sqrt{V * V}}\,. \qquad \text{(Эу)}$$

Так как тангенциальное уравнение абсолюта по принципу двойственности получится из уравнения (6) предыдущего шага в виде

$$u_1^2 + u_2^2 = 0,$$

то

$$(U * V) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Уравнение прямой имеет вид

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

(оно само по себе двойственно!). В неоднородных точечных координатах $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$ (сравните формулы (10) предыдущего шага) имеем:

$$u_1 x + u_2 y + u_3 = 0.$$

Обозначив $u_1 = A$, $u_2 = B$, $u_3 = C$, $v_1 = A'$, $v_2 = B'$, $v_3 = C'$, получим уравнения двух прямых в виде

$$\begin{aligned} Ax + By + C = 0; \\ A'x + B'y + C' = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Формула (Эу) угла между ними примет вид

$$\cos \omega = \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A'^2 + B'^2}}. \tag{16}$$

Такой вид имеет формула для вычисления угла между двумя прямыми во многих учебниках аналитической и элементарной геометрии.

Итак, при помощи абсолюта, состоящего из одной действительной прямой и двух принадлежащих ей мнимых точек, мы получили из проективной геометрии евклидову. Теперь легко догадаться, как называется геометрия, полученная на предыдущем шаге. Раз она двойственна евклидовой, то естественно называть ее *коевклидовой* (вспомните конец предыдущей главы!).

Глава пятнадцатая

ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ФИЗИКОВ

«Мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день», — так говорил Риман в 1854 году. С тех пор прошло более ста лет. Порог переступили, и в этом немалая роль принадлежит неевклидовой геометрии, которая порождается одним из оставшихся у нас абсолютов.

ШАГ ДЕСЯТЫЙ. САМАЯ СТРАННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Итак, рассмотрим абсолют

$$x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Его уравнение можно переписать в виде $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Следовательно, абсолют состоит из двух действительных прямых $x_1 = x_2$ и $x_1 = -x_2$, пересекающихся в точке $A_3\,(0:0:1)$. Однако геометрию, порождаемую этим абсолютом, мы пока рассматривать не будем, а начнем с *«геометрии Минковского»*. Она определяется двойственным предыдущему абсолютом, который имеет тангенциальное уравнение $u_1^2 - u_2^2 = 0$ и состоит из двух точек, имеющих «уравнения» $u_1 = u_2$ и $u_1 = -u_2$. Найдем координаты этих точек. Уравнение $u_i x_i = 0$ для всех прямых, проходящих через первую точку, имеет вид $u_1(x_1 + x_2) + u_3 x_3 = 0$, так как $u_2 = u_1$. Какие же точечные координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ удовлетворяют такому уравнению при всех значениях u_1 и u_3? Очевидно, те и

$Z_1(1:-1:0)$ $Z_2(1:1:0)$

$x_3=0$

Рис. 51

только те, для которых это уравнение обращается в тождество при любых u_1 и u_3, т.е. для искомых координат имеем: $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Значит, первая точка имеет координаты $(1 : -1 : 0)$. Для второй точки аналогично получим координаты $(1 : 1 : 0)$. Эти две точки определяют прямую $x_3=0$. Итак, получился абсолют, изображенный на рисунке 51. Будем считать прямую $x_3 = 0$ несобственной.

Так как абсолют — вырожденный, то нам понадобятся «формулы движения». Будем исходить из формул, аналогичных формулам (7) предыдущей главы:

$$u_1^* = a_{11}u_1 + a_{12}u_2;$$
$$u_2^* = a_{21}u_1 + a_{22}u_2; \qquad (1)$$
$$u_3^* = a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3,$$

ибо несобственная прямая $x_3 = 0$ имеет тангенциальные координаты $(0 : 0 : 1)$ и переходит при движении сама в себя. Кроме того, для сохранения абсолюта надо потребовать, чтобы $\lambda (u_1^2 - u_2^2) = (u_1^*)^2 - (u_2^*)^2$. Так как координаты однородные, то, как и раньше, будем считать $\lambda = 1$. Тогда наше требование дает:

$$a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1;$$
$$a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1; \qquad (2)$$
$$a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0.$$

Мы видим, что четыре буквы a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} связаны тремя соотношениями. Значит, все их можно выразить через одну вспомогательную букву. В предыдущей главе мы воспользовались тригонометрическими функциями. Здесь мы воспользуемся очень похожими на них «гиперболическими», которые и обозначаются очень похоже: ch (гиперболический косинус), sh (гиперболический синус). Подробная теория этих функций нам не понадобится. Мы просто введем обозначения $a_{11} = \operatorname{ch}\alpha$, $a_{21} = -\operatorname{sh}\alpha$ и внесем их в формулы (2). Первая из них дает

$$\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1. \qquad (3)$$

Из последней получаем пропорцию

$$\frac{a_{12}}{a_{21}} = \frac{a_{22}}{a_{11}}$$

или

$$a_{12} = ka_{21} = -k \operatorname{sh} \alpha;$$
$$a_{22} = k\,a_{11} = k \operatorname{ch} \alpha.$$

Множитель k находим при помощи средней из формул (2): $k^2 \operatorname{sh}\alpha - k^2 \operatorname{ch}\alpha = -1$. Значит, $k = \pm 1$. Положим, $k = 1$. Тогда $a_{21} = -\operatorname{sh}\alpha$, $a_{22} = \operatorname{ch}\alpha$. Окончательные формулы движения теперь можно записать в виде

$$u_1{}^* = u_1 \operatorname{ch} \alpha - u_2 \operatorname{sh} \alpha;$$
$$u_2{}^* = -u_1 \operatorname{sh} \alpha + u_2 \operatorname{ch} \alpha;$$
$$u_3{}^* = a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3.$$

Формулы движения в точечных координатах получаются тоже по аналогии с предыдущей главой:

$$\begin{aligned} x &= x^* \operatorname{ch} \alpha - y^* \operatorname{sh} \alpha + a, \\ y &= -x^* \operatorname{sh} \alpha + y^* \operatorname{ch} \alpha + b. \end{aligned} \tag{4}$$

Переходим к отысканию инварианта. Для двух точек $M\ (x,\ y)$ и $M'\ (x',\ y')$ имеем:

$$\begin{aligned} y - y' &= (x'^* - x^*) \operatorname{sh} \alpha + (y^* - y'^*) \operatorname{ch} \alpha; \\ x - x' &= (x^* - x'^*) \operatorname{ch} \alpha - (y^* - y'^*) \operatorname{sh} \alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Вот здесь начинается существенное расхождение с тем, что происходило в предыдущей главе. Наличие соотношения (3) дает такой инвариант: $(y - y')^2 - (x - x')^2 = (y^* - y'^*)^2 - (x^* - x'^*)^2$, который получается возведением в квадрат и вычитанием (а не сложением!) формул (5). При помощи этого инварианта по аналогии с предыдущей главой можно написать формулу

$$d = \sqrt{(y - y')^2 - (x - x')^2}\,. \tag{6}$$

Попробуем принять ее за метрику. Однако сразу возникает неприятность: для одних точек плоскости здесь получается действительное число (если $|y - y'| > |x - x'|$, то под корнем — положительное число), для других — мнимое (когда разность под корнем отрицательна), а для

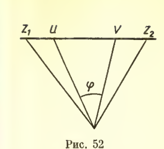


Рис. 52

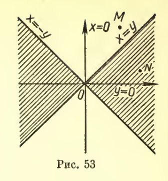


Рис. 53

некоторых (различных!) — даже нуль (при $|x-x'| = |y-y'|$).

Прежде чем убедиться, что формула (6) все-таки может служить метрикой, т.е. удовлетворяет аксиомам расстояния, посмотрим, как обстоит дело с метрикой углов. Здесь есть два действительных фиксированных направления Z_1 и Z_2, соответствующих несобственным точкам $Z_1(1:-1:0)$ и $Z_2(1:1:0)$. Поэтому возникает возможность ввести сложное отношение для любых двух направлений, отличных от Z_1 и Z_2. При этом, если направления U, V не разделяют направлений Z_1, Z_2, то сложное отношение положительно. Для таких углов получится гиперболическая метрика (рис. 52) и соответствующая формула (Гу). А в остальных случаях такой метрики не получится, ибо если U и V разделяют Z_1 и Z_2, то сложное отношение отрицательно, его логарифм не существует и с метрикой для углов дело обстоит не совсем хорошо.

Но все же геометрия, пусть и «нехорошая», есть, и нам надо рассмотреть ее подробнее. Прежде всего заметим, что надо «удалить», т.е. считать не принадлежащими этой геометрии все прямые, проходящие через точки абсолюта Z_1 $(1:-1:0)$ и Z_2 $(1:1:0)$. Они имеют уравнения $x_1 \pm x_2 + C\,x_3 = 0$, где C — любое число. Через каждую точку плоскости проходят две такие прямые... Они покрывают всю плоскость! Не очень-то удобно их «удалять»! Так как все точки остаются равноправными, то начнем исследование с начала координат, т.е. точки с неоднородными координатами (0, 0). Теперь посмотрите на рисунок 53. Прямые $x \pm y = 0$ разделяют плоскость на две области (зоны) относительно точки O: на «хорошую»,

для каждой из точек которой можно определить расстояние от точки O (в эту зону входит и ось $x = 0$, в ней всюду $|y| > |x|$), и «плохую», для точек которой по формуле (6) нельзя определить расстояние от точки O (в эту зону входит ось $y = 0$, в ней $|y| < |x|$, на рисунке эта область заштрихована).

Итак, формула (6) в пределах «хорошей» зоны может служить метрикой. Эта метрика отлична от всех предыдущих, хотя и похожа на параболическую. Обычно ее называют *псевдопараболической метрикой* расстояний.

Так как прямые $x \pm y = 0$ проходят через точки Z_1 и Z_2 абсолюта, то для всех пар прямых, проходящих через точку O и принадлежащих — обе сразу — «хорошей» зоне, определена и метрика углов — гиперболическая.

Итак, для каждой точки плоскости можно указать «хорошую» зону с двумя метриками и «плохую» без метрики. Получилась частично метризованная плоскость с гиперболической метрикой углов и псевдопараболической метрикой расстояний. Геометрия на этой плоскости и называется геометрией Минковского.

Подчеркнем, что разбиение точек геометрии Минковского на «хорошие» и «плохие» носит относительный характер, т.е. зависит от той точки, с которой мы начали рассмотрение (от начала координат). Разбиение же направлений, выступающих в роли касательных к траекториям, одинаково для всей плоскости — оно зависит только от задания точек Z_1 и Z_2 абсолюта.

Представьте себе, что именно геометрия Минковского, наиболее причудливая из всех рассмотренных нами, оказалась необходимой для математического описания устройства мира, определяемого принципом относительности Эйнштейна. Что это такое? И кто такой Минковский?

Остановка третья. Принцип относительности

Для поколения читателей, которому предназначена наша книга, теория относительности представляется если и не чем-то само собой разумеющимся, то, по крайней мере, привычным с детства и во многом понятным. О ней рассказывается в школьных учебниках, в тысячах популярных брошюр и даже в романах. Но в наше время наука прогрессирует так быстро, что одновременно живы

еще и те люди, для которых теория относительности была чем-то таинственным, недавно открытым (или даже придуманным) и уж, во всяком случае, очень непонятным. Даже сам Эйнштейн — может быть, шутя, — говаривал, что он открыл теорию относительности только потому, что сумел забыть всю физику и начал размышлять об «устройстве мира» заново...

Авторы принадлежат к тому поколению, которому пришлось перестраиваться в том возрасте и на том уровне знаний, когда «забыть все» уже невозможно. Поэтому нам очень не хотелось бы излагать сущность теории относительности... Но что делать, если сам Эйнштейн до конца своих дней неоднократно повторял тезис о «больших преимуществах метода, которым теория относительности обязана Минковскому», а Минковский — геометр, не только подробно разработавший одну из неевклидовых геометрий, но и применивший ее в теории относительности?

Что делать? Мы не могли придумать ничего лучше, чем обратиться прямо к Эйнштейну и процитировать кое-что из его последней книги «Сущность теории относительности».

Прежде всего, Эйнштейн подчеркивает философскую сторону дела: «В дорелятивистской[1] физике пространство и время были раздельными понятиями. Время приписывалось событиям независимо от пространства отсчета... О точках пространства и моментах времени говорили как будто они были абсолютной реальностью...».

Конечно, Эйнштейн осуждает здесь не реальность пространства и времени, а их абсолютизацию, т.е. отрыв их друг от друга.

«Не замечалось, — продолжает Эйнштейн, — что истинным элементом пространственно-временной локализации является событие, определенное четырьмя числами x_1, x_2, x_3, t.»

Здесь, конечно, x_1, x_2, x_3 — координаты точки пространства, а t — время.

«Физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие... Факт отсутствия разумного объек-

[1] Корень «релятив» во многих языках означает «относительность». «Дорелятивистский» значит «до открытия теории относительности».

тивного способа разделить четырехмерный континуум на трехмерное пространство и одномерный временной континуум указывает, что законы природы примут наиболее удовлетворительный с точки зрения логики вид, будучи выражены как законы в четырехмерном пространственно-временном континууме».

Если учесть, что термин «континуум» означает непрерывное множество, то мысль Эйнштейна совершенно ясна. Именно здесь он воздает должное Минковскому:

«На этом основаны большие преимущества метода, которым теория относительности обязана Минковскому. С его точки зрения мы должны рассматривать x_1, x_2, x_3, t как четыре координаты события в четырехмерном континууме».

Учитывая трудность восприятия этой новой непривычной абстракции, Эйнштейн подчеркивает, что и «соотношения евклидовой трехмерной геометрии являются абстракциями нашего разума, совершенно не совпадающими с теми образами, которые складываются у нас благодаря зрению и осязанию».

Мы не можем тут не вспомнить о творцах проективной геометрии, исходивших из того, что зрение осуществляет центральное проектирование с центром в зрачке глаза! А проективная геометрия тоже «совершенно не совпадает» с евклидовой и тоже является «абстракцией нашего разума»!

Итак, первый пункт теории — принцип неразделимости пространства и времени. Это значит, что формулы преобразования координат пространственно-временного континуума должны иметь такой вид:

$$x_i^* = f_i(x_1, x_2, x_3, t); \qquad t^* = f(x_1, x_2, x_3, t), \tag{7}$$

а не такой, какой предполагался само собой разумеющимся в дорелявистской физике:

$$x_i^* = f(x_1, x_2, x_3); \qquad t^* = f(t). \tag{8}$$

В последнем случае первые формулы — формулы преобразований движения евклидовой геометрии, являющиеся обобщением линейных формул (13) четырнадцатой главы на трехмерное пространство, а последняя — тоже линейная $t^* = t_0 + t$, где t_0 — момент времени, когда начато наб-

людение. Но какой вид должны иметь формулы (7)? Предоставим слово Эйнштейну.

«Нераздельность четырехмерного континуума совсем не означает эквивалентности пространственных координат x_1, x_2, x_3 временной координате t. Наоборот, мы должны помнить, что временная координата определена физически совершенно иначе, чем пространственные координаты».

В то же время все три пространственные координаты совершенно равноправны. Вот поэтому-то математическая суть теории относительности проявляется и в двумерном пространственно-временном континууме, т.е. при рассмотрении только одной пространственной координаты. Поэтому мы можем ограничиться двумерной геометрией Минковского.

Но вернемся к теории Эйнштейна. Конечно, одних философских рассуждений мало. Философствовать физики всегда любили больше, чем математики. Но для установления формул нужны данные физических опытов. Именно такие данные предоставила Эйнштейну интенсивно развивавшаяся тогда молодая отрасль физики — электродинамика, т.е. теория электромагнитного поля. Развивалась она быстро, но ощупью, не имея никаких твердых основ, кроме полезных, но весьма сомнительных аналогий с гидродинамикой, т.е. с теорией поля скоростей движущейся жидкости: в каждый момент времени через каждую точку потока пробегает частица жидкости с определенным вектором скорости; таким образом, в каждой точке пространства можно нарисовать стрелочку — как травинку в каждой точке лужайки (отсюда и термин «поле»). Но теория поля скоростей потока жидкости укладывалась в старые евклидовы рамки, а формулы электродинамики приходилось угадывать, опираясь на опыт. Физик Максвелл нашел эти довольно сложные формулы, но они не были инвариантными относительно формул (8). И тогда другой физик — Лоренц отыскал формулы, относительно которых уравнения Максвелла стали инвариантными. Эйнштейн выписал формулы Лоренца в книге, которую мы все время цитируем, в виде

$$x' = x\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,l;$$
$$l' = -x\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,l. \qquad (9)$$

Здесь x обозначает пространственную координату, а $l = ct$, где t — время, c — постоянная, равная скорости света в пустоте, v — переменная величина (скорость одной системы координат в пространстве относительно другой).

Функции $F_1(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ и $F_2(v) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ обладают свойством:

$$\{F_1(v)\}^2 - \{F_2(v)\}^2 = 1.$$

Но это — то же самое свойство, которым (одним!) определяются гиперболические функции:

$$\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1.$$

Значит, формулы Лоренца (9) совпадают с формулами движения (4) геометрии Минковского, если положить $x' = x^*$, $x = x$, $l' = y^*$, $l = y$, $F_1(v) = \mathrm{ch}\alpha$, $F_2(v) = \mathrm{sh}\alpha$ и считать неподвижным начало координат, т.е. $a = b = 0$.

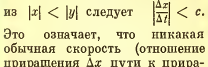
Геометрия Минковского уже содержится в формулах Лоренца. Не удивительно, что Эйнштейн пришел к заключению:

«... преобразования Лоренца определяются так, чтобы уравнение $\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - \Delta l^2 = 0$ было ковариантным, т.е. так, чтобы оно выполнялось во всех инерциальных системах, если оно выполняется в той, к которой мы относим два данных события...».

На языке геометрии Минковского инвариантность величины $-\Delta x^2 + \Delta l^2$ (как обычно, здесь $\Delta x = x' - x$, $\Delta l = l' - l$) означает инвариантность метрики ППр $\Delta y^2 - \Delta x^2 \equiv (y' - y)^2 - (x' - x)^2$.

Так геометрия Минковского стала языком первого принципа относительности (т.е. «специальной» теории относительности, в отличие от общей теории относительности, иначе именуемой «теорией тяготения»). Главная физическая сущность этого принципа состоит в утверждении абсолютного постоянства скорости света, т.е. независимости ее от всех «систем отсчета»... Вот почему иногда в шутку говорят, что теория относительности есть «теория, базирующаяся на абсолютном» (постоянстве скорости света). Именно это утверждение и было проверено многочисленными экспериментами.

Мы не пойдем дальше и не будем рассказывать о том, как «хорошие» и «плохие» зоны, допустимые траектории и другие «странности» геометрии Минковского получают великолепные физические истолкования,— все это можно найти в книгах по теории относительности. Отметим лишь, что разделяющие зоны прямые $x = \pm y$ теперь определяются уравнениями $x = \pm ct$, и для «хорошей» зоны из $|x| < |y|$ следует $\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| < c$.



Это означает, что никакая обычная скорость (отношение приращения Δx пути к приращению Δt времени) не может превзойти скорости света c, что составляет содержание одного из важнейших постулатов теории относительности. Именно поэтому Эйнштейн считал скорость света самым удобным процессом, «придающим понятию времени физический смысл».



Герман Минковский

На этом мы прощаемся с Эйнштейном, ибо наша тема — геометрия, а не принцип относительности.

Как известно, этот принцип был впервые отчетливо сформулирован великим физиком еще в 1905 году. Математическую же модель он нашел в работах геометра Германа Минковского.

Минковский был очень талантливым человеком. Родившийся в деревушке недалеко от Каунаса (ныне — Литовская ССР) и в детстве перевезенный родителями в Германию, он уже семнадцати лет получил премию Парижской Академии наук за свою первую математическую работу по одной специальной теме из теории чисел. Особенностью этой и последующей работ молодого математика было то, что он решал задачи теории целых чисел геометрически, хотя эта теория по самой природе своей трактует сугубо дискретное (т.е. не непрерывное) множество, а геометрия есть символ непрерывности в математике. Конечно, у Минковского были предшественники, но именно он считается создателем «геометрической теории чисел».

Заметим попутно, что в XX веке большинство результатов в теории чисел стало получаться применением методов теории непрерывных функций.

Вот почему не следует удивляться, что именно Минковский сумел «геометризировать» и только что открытую теорию относительности. Ему не показались ни странными, ни загадочными первые работы Эйнштейна, его мало волновал вопрос об экспериментальном подтверждении принципа относительности. Он «увидел» здесь применение еще одной неевклидовой геометрии и посвятил этой геометрии последние годы своей жизни...

В 1907—1908 годах Минковский опубликовал три больших мемуара, а за несколько месяцев до смерти (он умер 45 лет в январе 1909 года) сделал доклад на съезде естествоиспытателей (так в те времена еще именовались все представители негуманитарных наук) и врачей в Кельне. Этот доклад был опубликован уже после его смерти. Основной темой доклада была четырехмерная геометрия, которая позднее была названа псевдоевклидовой геометрией или геометрией Минковского. А соответствующее пространство до сих пор часто (особенно физики) называют «четырехмерным миром Минковского...».

То, что именно геометрия Минковского так хорошо послужила физике, конечно, очень приятно. Но не надо забывать, что толчком к развитию этой геометрии (интересной и важной для математики, как таковой) послужило великое открытие в физике. Это одно из многочисленных подтверждений того, что самые абстрактные математические теории имеют основой практику, реальную, материальную действительность. Именно поэтому математика и способна «обслуживать» физику и другие конкретные науки. Именно поэтому Эйнштейн всю жизнь отмечал значение метода геометра Минковского для теории относительности, хотя первая работа самого Эйнштейна называлась «К электродинамике движущихся тел» и в ней еще не было геометрического неевклидова языка, но уже был сформулирован принцип относительности.

Что касается Минковского, то он не хвалил Эйнштейна, так как успел познакомиться только с немногими работами гениального физика. Самого же Эйнштейна Минковский помнил: Эйнштейн учился в Цюрихском федеративном политехникуме, когда там преподавал Минковский. Незадолго до смерти Минковский вспоминал: «Ах, Эйнш-

тейн! Да ведь он всегда отлынивал от лекций, ему я этого (т.е. разработку теории относительности) никогда не доверил бы». Мы надеемся, что читатель не будет прикрываться этой цитатой, когда ему случится отлынивать от занятий.

Добавим в заключение, что упоминавшаяся выше общая теория относительности, основы которой тоже заложены А. Эйнштейном, имеет своим языком риманову геометрию в широком смысле. В этой геометрии порождающий метрику инвариант принимает более общий вид $g_{ij}dx_i dx_j$, где g_{ij} — функция от координат x_i, а dx_i — дифференциалы. Эта геометрия остается за рамками нашей книги, так же как и подробная история открытия самой теории относительности. В этой истории важную роль сыграл знаменитый французский математик Пуанкаре. Ему же, строго говоря, принадлежит и приоритет открытия геометрии, которой физики присвоили имя Минковского. Но имя Пуанкаре встречается в математике и так довольно часто...

ШАГ ОДИННАДЦАТЫЙ. ГЕОМЕТРИЯ ГАЛИЛЕЯ. ЕЩЕ ОДИН ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Абсолют $x_1^2 - x_2^2 = 0$, с которого мы начали десятый шаг, порождает еще одну весьма «странную» геометрию, но математическое описание ее получается шаблонным применением принципа двойственности. Читатель, вероятно, будет рад тому, что мы опустим описание этой (уже восьмой по счету) метрической геометрии, и сам догадается, что называть ее придется *копсевдоевклидовой*, ибо вещам, получившимся по шаблону, собственные имена не присваивают.

У нас остался еще один абсолют: $x_1^2 = 0$. Нумерация проективных координат безразлична, поэтому его можно задать и так: $x_3^2 = 0$. В «чистом виде» это дает только несобственную прямую $x_3 = 0$ и аффинную геометрию.

Но есть еще одна возможность: получить уравнение $x_3^2 = 0$ предельным переходом из уравнения $tx_2^2 - x_3^2 = 0$. При $t \to 0$ две прямые $\sqrt{t}\, x_2 + x_3 = 0$ и $\sqrt{t}\, x_2 - x_3 = 0$ сольются в одну, а точка их пересечения $x_2 = x_3 = 0$ (т.е. точка $(1 : 0 : 0)$) останется — получится «флаг»

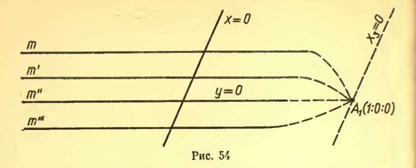


Рис. 54

(см. гл. 11, «Шаг четвертый»). Точно такой же флаг получится и при двойственном рассуждении: точки Z_1 и Z_2 геометрии Минковского сольются в одну, но прямая $x_3 = 0$ останется. Введем метрику во флаговую геометрию! Как? Знакомым приемом — при помощи формул движения! Зададим абсолют, как и в одиннадцатой главе, уравнением $x_3 = 0$ и точкой A_1 (1 : 0 : 0) и вспомним уравнения преобразований, сохраняющих флаг, т.е. уравнения (10) главы одиннадцать. Чтобы получить метрику, сузим группу, положив $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$. Перейдя к неоднородным координатам, получим «формулы движения» новой (уже не просто флаговой!) геометрии:

$$\begin{aligned} x^* &= x + vy + a; \\ y^* &= y + b, \end{aligned} \qquad (10)$$

где буквами v, a и b заменены коэффициенты a_{12}, a_{13}, a_{23}, что, конечно, не меняет дела.

Теперь один инвариант находится чрезвычайно просто. Если для двух точек M (x, y) и N (x', y') имеем $y \neq y'$, т.е. вторые координаты различны, то легко проверить, что $|y'^* - y^*| = |y' - y|$. Для таких точек этот инвариант можно принять за расстояние: d $(MN) = |y' - y|$. Легко проверить, что все три аксиомы расстояния выполняются.

Как же быть с точками, для которых $y' = y$, т.е. с точками, лежащими на одной из прямых $y = \text{const}$, «проходящих» через точку флага (рис. 54)? Ведь для них $|y' - y| = 0$. Можно вообще не определять на них метрику (как, например, в геометрии Минковского на прямых $x = \pm y$). Но можно подсчитать разность первых координат. Получим: $|x'^* - x^*| = |x' + vy' + a - x - vy - a|$.

Так как $y = y'$, то

$$|x'^* - x^*| = |x' - x|,$$

что и дает метрику на «нехороших» прямых.

Эта геометрия сама себе двойственна, поэтому метрика углов между прямыми вводится совершенно аналогично. Получившаяся геометрия называется *геометрией Галилея*. Она подробно описана в книге серии «Библиотека математического кружка», вып. 11. Мы не будем поэтому продолжать рассказ об этой геометрии, а только объясним ее название.



Галилео Галилей

Дело в том, что если старейшим разделом математики является евклидова геометрия, то старейшим разделом физики является классическая механика, т.е. наука о движении тел и их совокупностей, так или иначе между собой связанных. Простейшим движением является равномерное прямолинейное движение, с которого начинается и школьный курс механики.

Очень давно экспериментально было установлено, что равномерное прямолинейное движение любой системы тел никак не отражается на положении частей этой системы и движениях их относительно друг друга. Эти части как бы не замечают того, что вся система движется равномерно и прямолинейно. Достаточно четко и подробно этот факт был описан Галилео Галилеем (1564—1642).

После появления принципа относительности Эйнштейна, утверждавшего инвариантность метрики пространства событий относительно преобразований систем отсчета пространственно-временного континуума, физики вспомнили о Галилее и назвали то, что он описал, «принципом относительности Галилея». Математически для прямолинейного движения этот принцип означает, что все законы механики должны быть инвариантны относительно преобразований координаты точки и времени по формулам

$$x^* = x + vt + a; \quad t^* = t + b.$$

Эти формулы совпадают с формулами (10) метризованной флаговой геометрии (вместо y^* и y стоят t^* и t; теперь понятно, почему мы один коэффициент в этих формулах обозначили v). Значит, эта геометрия относится к классической механике так же, как геометрия Минковского к теории относительности. Вот почему имя одного из основателей классической механики присвоено не только установленному им принципу относительности, но и соответствующей этому принципу геометрии.

* * *

Мы прощаемся с нашим терпеливым читателем. Тот, кто дочитал книгу до конца и заинтересовался неевклидовыми геометриями, наверное захочет продолжить знакомство с ними и их создателями. Такому читателю мы рекомендует следующие книги.

Борн М. Воспоминания о Германе Минковском. — В кн.: Борн. М. Размышления и воспоминания физика. М., 1977.

Глаголев Н. А. Проективная геометрия. М., 1963.

Лаптев Б. Л. Лобачевский и его геометрия. М., 1976.

Матвиевская Г. П. Рене Декарт. М., 1976.

Рид К. Гильберт. М., 1977.

Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. М., 1964.

Хрестоматия по истории математики. Арифметика. Теория чисел. Геометрия. М., 1976.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РОМАН НИКОЛАЕВИЧ ЩЕРБАКОВ
ЛЕВ ФЕДОРОВИЧ ПИЧУРИН

ОТ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ — К НЕЕВКЛИДОВОЙ (ВОКРУГ АБСОЛЮТА)

Редактор *Т. А. Бурмистрова*
Художник *Б. Н. Юдкин*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *Г. Л. Татура* и *М. И. Смирнова*
Корректоры *В. Г. Соловьева* и *О. В. Ивашкина*

ИБ № 3931

Сдано в набор 29.11.78. Подписано к печати 16.08.79. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$. Бум. тип. № 2. Гарн. Обыкн. нов. Печвть высокая Усл. печ. л. 5 Уч.-изд. л. 7,93 Тираж 100000 экз. Звкая 885. Цена 20 коп.

●

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

20 к.

